Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Вологодская государственная
молочнохозяйственная академия имени Н.В. Верещагина»

Инженерный факультет

Кафедра технические системы в агробизнесе

В. Ю. Ивановская

Математика. Краткий курс и задания для индивидуального выполнения.

Учебное пособие

для студентов, обучающихся по направлениям подготовки:

15.03.02 - Технологические машины и оборудование,
38.03.01 - Экономика,
38.03.02 - Менеджмент,
35.03.06 - Агроинженерия,
19.03.03 - Продукты питания животного происхождения,
27.03.01 - Стандартизация и метрология
36.03.01 – Зоотехния
35.03.02 – Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств
35.03.07 – Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции
35.03.05 – Садоводство
35.03.04 – Агрономия
35.03.01 – Лесное дело

Вологда – Молочное
2023

УДК 51
ББК 22.1
И

Рецензенты:
канд. техн. наук, доцент кафедры технические системы в агробизнесе
ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА **Н.Н. Кузнецов;**
ст.преподаватель кафедры энергетических средств и технического
сервиса ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА **С.В. Гайдидей**

Ивановская В.Ю.

И Математика. Краткий курс и задания для индивидуального выполнения: учебное пособие / В.Ю. Ивановская. – Вологда–Молочное: ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА, 2023. – 220 с.

Основной целью учебного пособия МАТЕМАТИКА. КРАТКИЙ КУРС И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ является стимулирование самостоятельной работы студентов-бакалавров экономических и инженерных направлений подготовки 38.03.01 - Экономика, 38.03.02 - Менеджмент, 35.03.06 - Агроинженерия, 15.03.02 - Технологические машины и оборудование, 19.03.03 - Продукты питания животного происхождения, 27.03.01 - Стандартизация и метрология, 36.03.01 – Зоотехния, 35.03.02 – Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств, 35.03.07 – Технология производства и переработки сельскохозяйственной продукции, 35.03.05 – Садоводство, 35.03.04 – Агрономия, 35.03.01 – Лесное дело.

Учебное пособие разработано в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования с целью оказания помощи при проведении аудиторных занятий, организации самостоятельной работы студентов в подготовке к промежуточной аттестации и выполнении индивидуальных заданий по разделам курса Математика.

Рекомендовано методическим советом академии в качестве учебного пособия и издается по решению редакционно-издательского совета ФГБОУ ВО Вологодской ГМХА.

УДК 51

ББК 22.1

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие МАТЕМАТИКА. КРАТКИЙ КУРС И ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ содержит необходимый минимум теоретического материала, который будет способствовать успешному усвоению дисциплины и его применению к решению различных практических задач. Основная цель учебного пособия – дать базовые знания в области математических наук, научить применять полученные знания в профессиональной деятельности и ознакомить студентов с конкретными математическими приёмами и методами, необходимыми для применения на практике, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования.

Разделы дисциплины, рассматриваемые в пособии, выбраны таким образом, чтобы в них содержались основные понятия тех тем, которые включены в данный курс, с целью оказания помощи при проведении практических и лабораторных занятий, организации самостоятельной работы студентов в подготовке к промежуточной аттестации и выполнении индивидуальных заданий по разделам данного курса. После изложения теоретического материала в каждой главе приводится ряд решенных задач. Также пособие содержит индивидуальные задания и проверочные тесты, решение которых требуют знаний каждого раздела дисциплины Математика.

1 МНОЖЕСТВА. МЕРА МНОЖЕСТВА

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [1], [2], [4].

1.1 Виды множеств. Операции над множествами

Множества как вид данных оказались очень удобными для программирования сложных жизненных ситуаций, так как с их помощью можно точно моделировать объекты окружающего мира и компактно отображать сложные логические взаимоотношения.

В математике понятие множества является одним из главных.

Известно, что «***множество***» – это неопределяемое понятие математики. Известный немецкий математик Георг Кантор, чьи работы лежат в основе современной теории множеств, говорил, что «под «множеством» мы понимаем соединение в некое целое M определенных хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления, которые будут называться «элементами» множества M». Системы, семейства, совокупности – это синонимы понятия множество.

Множества обозначают заглавными латинскими буквами *A, B, C*, а все объекты, составляющие множество, называются их ***элементами*** и обозначаются строчными буквами *a, b, c*. Запись $a \in R$ означает, что элемент a принадлежит множеству *R*, то есть a является элементом множества *R*. В противном случае, когда *a* не принадлежит множеству *R*, пишут $a \notin R$.

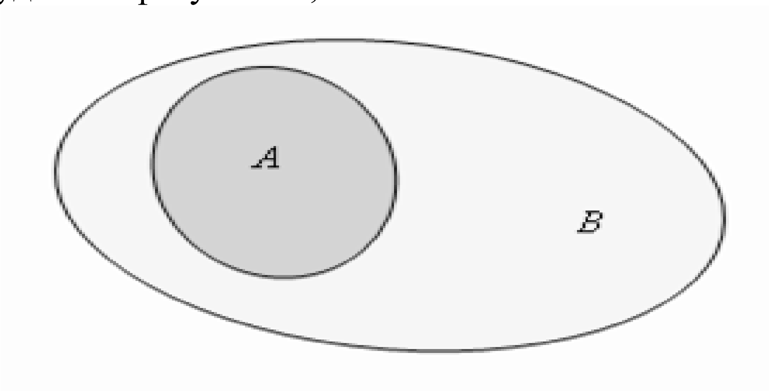
Множества могут быть составлены из конечного или бесконечного количества объектов. Например, число студентов первокурсников, число зрителей в кинотеатре, количество точек на прямой и так далее.

Два множества *A* и *B* называются ***равными*** ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества *A* является элементом множества *B* и наоборот, каждый элемент множества *B* является элементом множества *A*.

Говорят, что множество *A* является ***подмножеством*** множества *B* ($A \subset B$), если каждый элемент множества *A* одновременно является элементом множества *B* (рис. 1).

Пример 1.

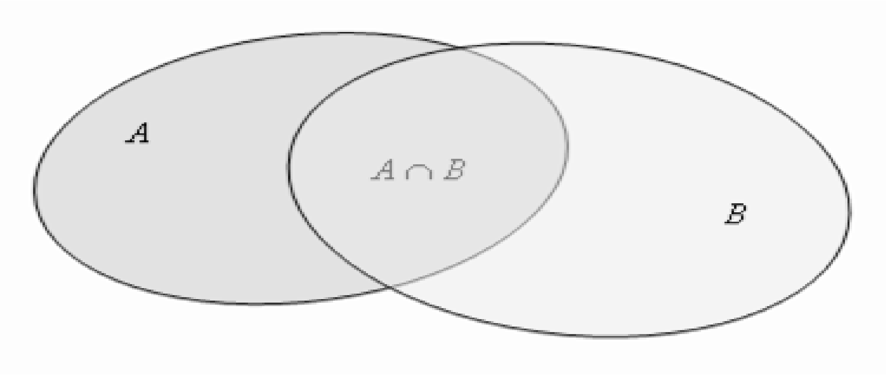
Пусть *A* – число студентов, обучающихся на первом курсе, а *B* – число всех студентов факультета, то $A \subset B$.



Р и с. 1. Подмножество *A*

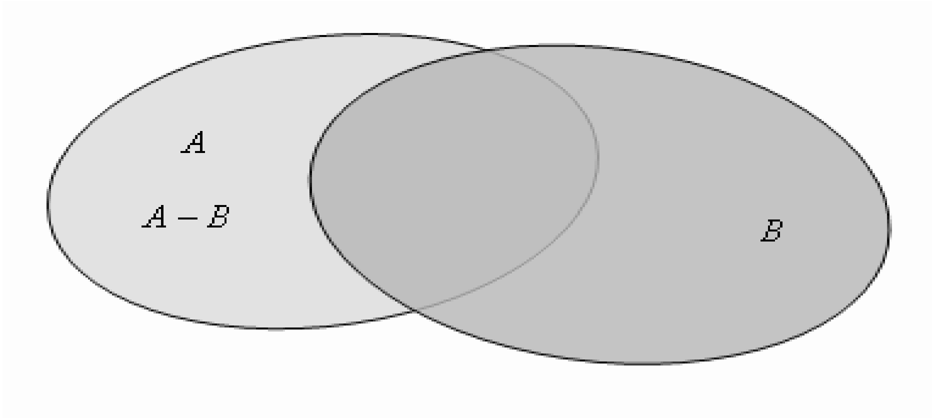
Объединением множеств *A* и *B* ($A \cup B$) называют множество элементов, каждый из которых принадлежит либо *A*, либо *B*.

Пересечение множеств ($A \cap B$) это множество элементов, каждый из которых принадлежит и *A* и *B* (рис. 2).



Р и с. 2. Произведение множеств *A* и *B*

Разность множеств *A* и *B* есть множество элементов ($A \backslash B$), которые принадлежат множеству *A*, но не принадлежат множеству *B* (рис. 3). Это множество называется ***дополнением множества*** *B* относительно множества *A*.



Р и с. 3. Разность множеств *A* и *B*

Элементами множества могут быть объекты любой природы – числа, векторы, точки, матрицы и т.п. В частности элементами множества могут являться и сами множества.

Минимальным множеством является ***пустое множество*** – $\varnothing$, которое не содержит ни одного элемента.

Множества, все элементы которого числа, называется ***числовым***.

Пример 2.

Равны ли множества A= {3,4,5} и B = {5,4,3}?

Решение. Так как множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то они равны. $\frac{m}{n}$, $где\, m \in z, n \in N$

Пример 3.

Пусть множество A = {1,2,3,4,5}, а множество состоит из чисел B = {2, 4, 6, 8}. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$.

Решение. $A \cup B$={1,2,3,4,5,6,8}; $A \cap B$={2,4}; $A \backslash B$={1,3,5}.

Пример 4.

Выполнить следующие операции над множествами:

a) {2,3,4} $\cup$ {2,4,6};

b) {2,3,4} $\cap$ {2,4,6};

c) {2,3,4} \ {2,4,6}.

Решение.

a) $\{2,3,4\} \cup \{2,4,6\} = \{2,3,4,6\}$;

b) {2,3,4} $\cap$ {2,4,6}={2,4};

c) {2,3,4} \ {2,4,6}={3}.

Пример 5.

В группе из 50 туристов 30 человек знают английский язык, 25 знают французский и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

Решение. Обозначим: U – множество всех туристов,

A – множество туристов, знающих английский язык,

B – множество туристов, знающих французский язык,

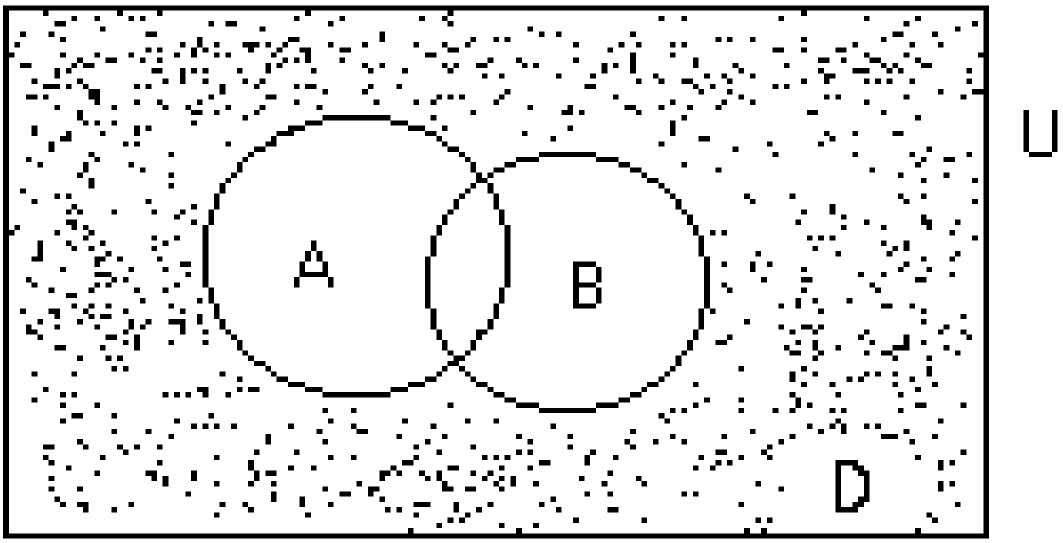
D – множество туристов, не знающих ни английского ни французского языка.

Необходимо найти количество туристов, не знающих ни одного языка, т.е. количество элементов множества $D = U \setminus (A \cup B)$ (на рис. 4 заштриховано). По условию: $m(U) = 50$ (чел.), $m(A) = 30$ (чел.), $m(B) = 25$ (чел.), $m(A \cap B) = 23$ (чел.). Тогда $m(D) = m(U) – m(A \cup B)$.

Используя формулу, находим количество туристов, знающих хотя бы один язык: $m(A \cup B) = m(A) + m(B) – m(A \cap B) = 30 + 25 - 23 = 32$.

Тогда искомое количество туристов, не знающих ни одного языка:

$$m(D) = m(U) - m(A \cup B) = 50 – 32 = 18 \text{ (чел.)}$$



Р и с. 4. Множество туристов

1.2 Мера множества. Свойства меры множества

Мера μ – неотрицательная величина, обобщающая понятия длины отрезка, площади плоской фигуры и объёма тела на множества более общей природы.

Задача определения длины множеств весьма важна, так как она имеет существенное значение для обобщения понятия интеграла. Понятие меры множества применяется и в других вопросах теории функций, а также в теории вероятностей, топологии, функциональном анализе и т.д.

Мера открытого множества равна сумме длин составляющих его интервалов. В частности, мера одного интервала равна его длине

$$\mu(a,b) = b - a.$$

Мера произвольного отрезка равна его длине

$$\mu[a,b] = b - a.$$

Если имеются два непересекающихся отрезка, то под мерой множества, состоящего из этих двух отрезков, естественно понимать число $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)$.

Из определения следует, что мера обладает следующими свойствами:

1. Мера пустого множества равна нулю

$$\mu(\varnothing) = 0.$$

2. Монотонность – мера подмножества не больше меры самого множества

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B).$$

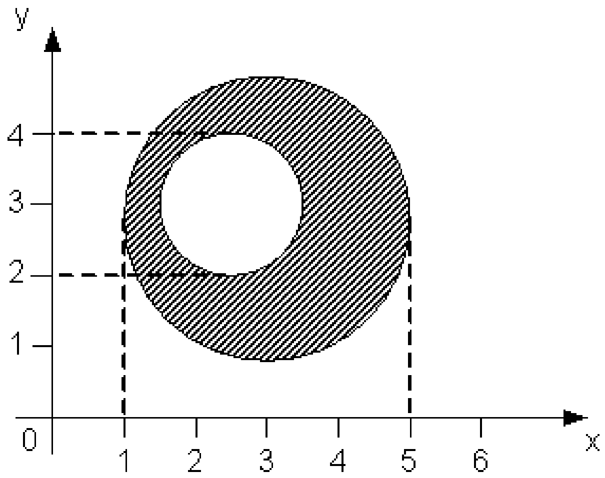
3. Мера разности вложенных множеств равна разности мер этих множеств

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

4. Мера множества, состоящего из конечного числа точек, равна нулю.

<u>Пример 6.</u>
Найти меру множества $(1,3) \cup (5,9)$
<u>Решение.</u> $(1,3) \cup (5,9) = (3-1) + (9-5) = 6$

<u>Пример 7</u>.
Найти меру заштрихованного множества (см. рис. 5).



Р и с. 5. Мера множества

Решение. Обозначим C – площадь заштрихованной фигуры, B – площадь внешнего круга, A – площадь внутреннего круга.

Тогда, $\mu(C) = \mu(B) - \mu(A) = S(B) - S(A)$.

$$\mu(C) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi 2^2 - \pi 1^2 = 4\pi - \pi = 3\pi$$

Пример 8.

Доказать равенство $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Решение. Пусть $x \in A \cap B$, *тогда* $x \in A, x \in B$.

Пусть $x \in A \ \ (A \setminus B)$, *тогда* $x \in A, x \in B$.

Видим, что равенство справедливо.

1.3 Вопросы для самопроверки:

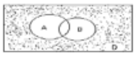
1. Что понимается под «множеством»?
2. Что является элементами множества?
3. Какие два множества будут равными?
4. В каком случае множество А является подмножеством множества В?
5. Как обозначается пустое множество?
6. Какое множество называется пересечением множеств А и В?
7. Перечислить основные числовые множества.
8. Какие основные логические символы известны?
9. Что называют промежутками?
10. Что понимают под мерой множества?
11. Свойства меры множества.

2 ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [4], [3], [6], [8].

2.1 Понятие функции. Способы задания

Одним из основных понятий математики является понятие функции. Оно связано с установление зависимости между элементами двух множеств.

Если каждому элементу x из множества X ставится в соответствие один и только один элемент y множества $У$, то говорят, что на множестве X задана ***функция***  При этом x является независимой переменной (или аргументом), а y – зависимой переменной.

Множество X называется ***областью определения функции*** и обозначается *D(y),* а множество $У$ – ***областью значений функции*** *E(y).* ***Область допустимых значений*** функции (ОДЗ) – это множество тех значений переменной x, при которых функция *f(x)* имеет смысл.

Пример 9.

Определить ОДЗ функции .

Решение. Функция имеет смысл при всех x, кроме $2x-6\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$. Тогда ОДЗ будет объединением промежутков $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

Существует несколько способов задания функции:

- Аналитический – с помощью формул.

Пример 10.

Функция $y=x^3$ определена на интервале $(-\infty,+\infty)$.

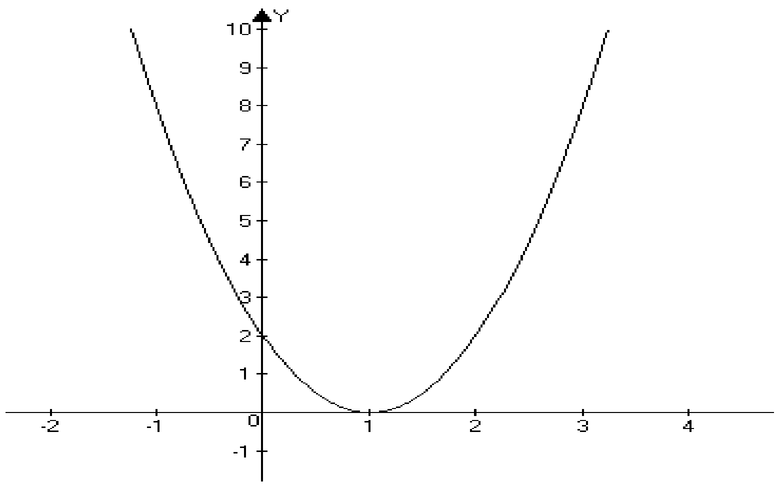
- Табличный – функция задается таблицей ряда значений x и y.

Пример 11.

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_1	y_2	y_3	y_4

- Графический – с помощью графика функции (рис. 6).

Пример 12.



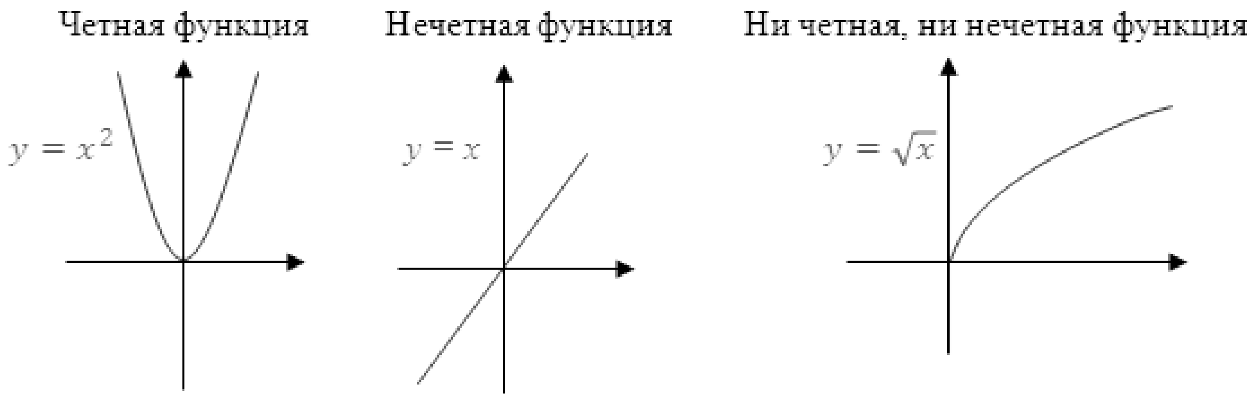
Р и с. 6. Графическое задание функции

2.2 Свойства функций

К основным свойствам функций относятся:

1) Четность/нечетность. Функция является ***четной,*** если $y(-x)= = y(x)$. Четность функции указывает на симметрию графика относительно оси ординат.

Функция является ***нечетной***, если $y(-x)=-y(x)$. Нечетность функции указывает на симметрию графика относительно начала координат (см. рис. 7).

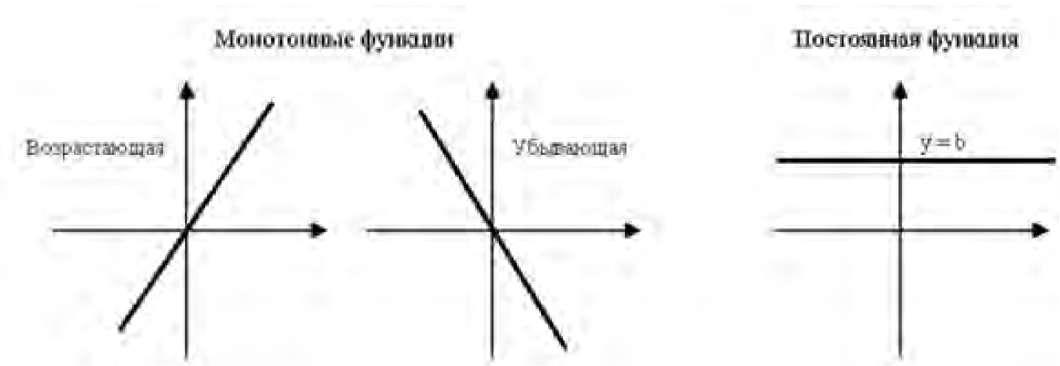


Р и с. 7. Четность/нечетность функций

2) Монотонность (возрастание/убывание)функции.

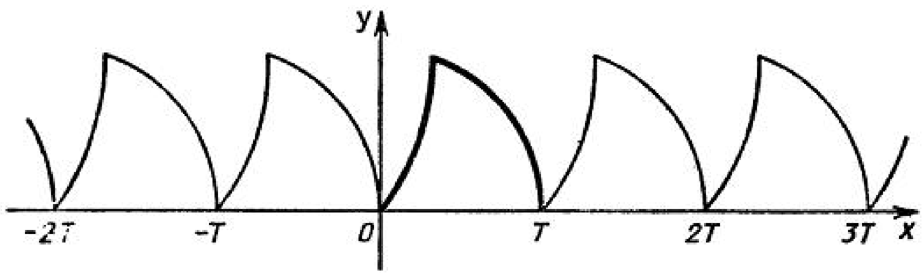
Если функция определена на промежутке D и для любых значений x_1 и $x_2 \in D,$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) < f(x_2),$ то функция называется возрастающей, если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2),$ то функция убывающая на промежутке D.

Если функция убывает или возрастает на промежутке D, то она является ***монотонной*** на этом промежутке (рис. 8).



Р и с. 8. Монотонность функции

3) Периодичность (или повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода). Функция называется ***периодической***, если существует такое ненулевое число *T, что* $f(x+T)=f(x)$, где T – период (рис. 9).



Р и с. 9. Периодическая функция

Пример 13.

Исследовать функцию $f(x)=x^2$ на четность.

Решение. Для заданной функции $f(-x)=f(-x)^2=x^2=f(x)$. Значит, эта функция четная.

Пример 14.

$\cos x$ является периодической с периодом $T=2\pi$, так как $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)=\cos x$.

2.3 Основные элементарные функции, их свойства и графики

Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются ***элементарными***.

Рассмотрим основные элементарные функции, приведем их графики и свойства.

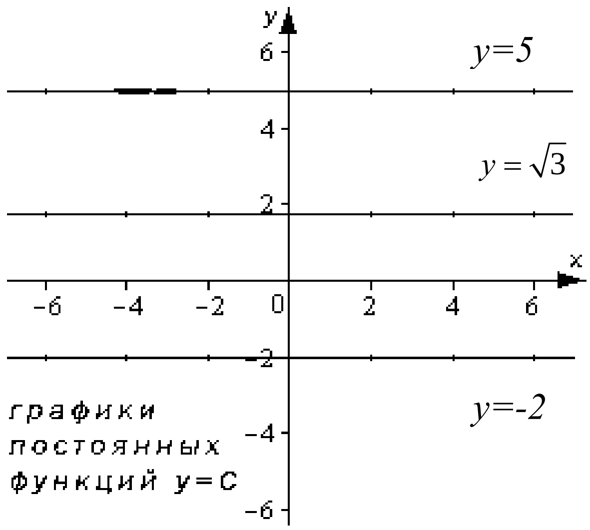
Основными элементарными функциями являются: постоянная функция (константа), корень n-ой степени, степенная функция, показательная, логарифмическая функция, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

2.3.1. Постоянная функция

Постоянная функция задается на множестве всех действительных чисел формулой $y = c$, где C – некоторое действительное число. Постоянная функция ставит в соответствие каждому действительному значению независимой переменной x одно и то же значение зависимой переменной y – значение C. Постоянную функцию также называют константой.

Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку с координатами *(0,C)*.

Для примера покажем графики постоянных функций $y=5$, $y=-2$ и $y = \sqrt{3}$ на рисунке ниже.



Р и с. 10. Постоянная функция

Свойства постоянной функции:

- Область определения: все множество действительных чисел.
- Постоянная функция является четной.
- Область значений: множество, состоящее из единственного числа C.

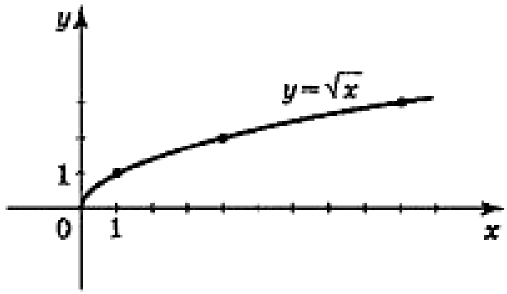
2.3.2 Корень n-й степени

Рассмотрим основную элементарную функцию, которая задается формулой $y = \sqrt[n]{x}$, где n – натуральное число, большее единицы:

а) Корень n-ой степени, n – четное число.

Начнем с функции корень n-ой степени при четных значениях показателя корня n.

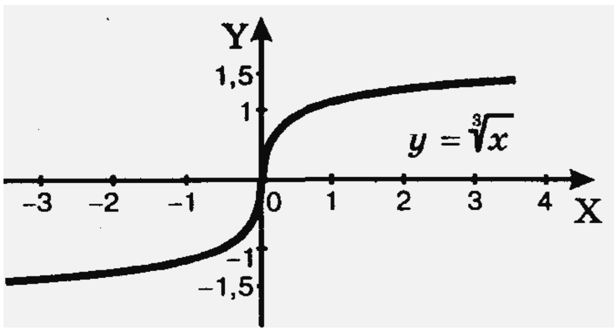
Для примера приведем рисунок с изображениями графика функции $y = \sqrt{x}$.



Р и с. 11. График функции $y = \sqrt{x}$.

Аналогичный вид имеют графики функций корень четной степени при других значениях показателя.

Функция корень n-й степени с нечетным показателем корня n определена на всем множестве действительных чисел. Для примера приведем графики функций $y = \sqrt[3]{x}$.



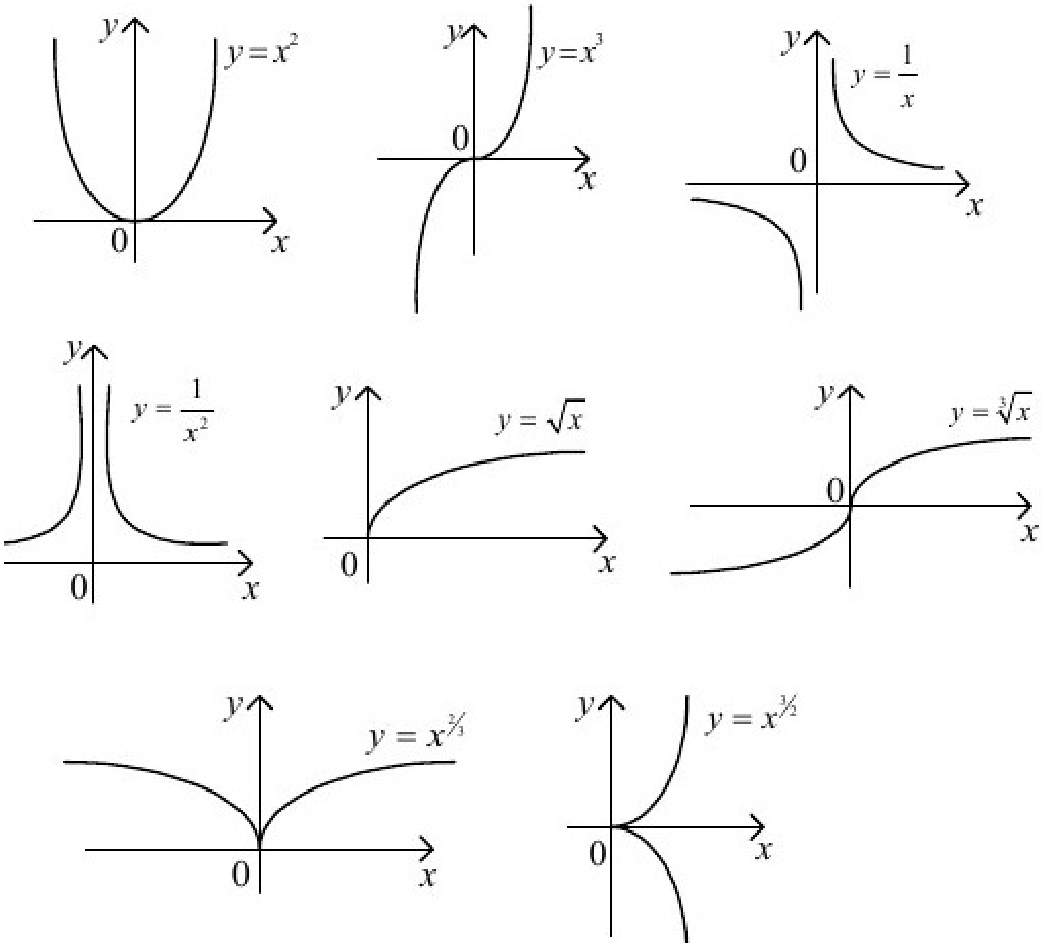
Р и с. 12. График функции $y = \sqrt[3]{x}$.

При других нечетных значениях показателя корня графики функции $\boldsymbol{y = \sqrt[n]{x}}$ будут иметь схожий вид.

2.3.3 Степенная функция

Степенная функция задается формулой вида $\boldsymbol{y = x^a}$.

Рассмотрим степенную функцию с целым показателем a. В этом случае вид графиков степенных функций и свойства функций зависят от четности или нечетности показателя степени, а также от его знака. Свойства степенных функций с дробными и иррациональными показателями (как и вид графиков таких степенных функций) зависят от значения показателя a (рис. 13).



Р и с. 13. Степенная функция

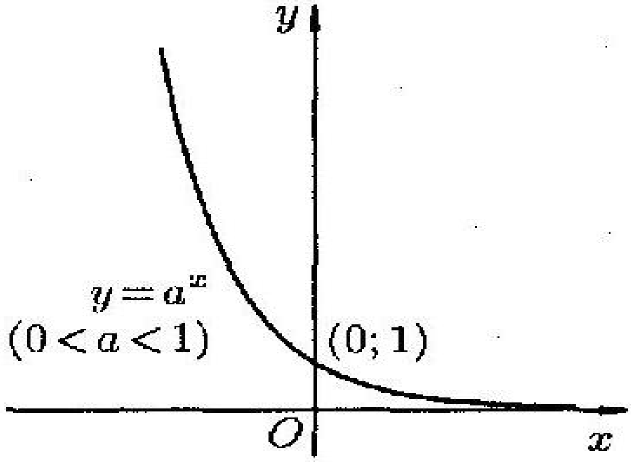
2.3.4 Показательная функция

Одной из основных элементарных функций является показательная функция.

График показательной функции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}^x$, где $\boldsymbol{a}>0\, и\, \boldsymbol{a}\neq 1$ принимает различный вид в зависимости от значения основания a. Разберемся в этом.

а) Сначала рассмотрим случай, когда основание показательной функции принимает значение от нуля до единицы, то есть, .

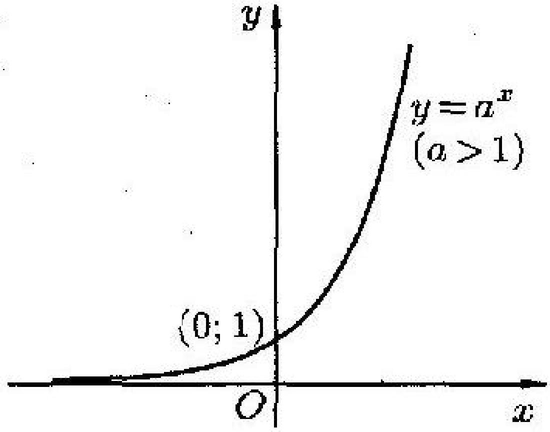
Для примера приведем графики показательной функции при *a = 1/2* – синяя линия, *a = 5/6* – красная линия. Аналогичный вид имеют графики показательной функции при других значениях основания из интервала $0<a<1$.



Р и с. 14. Показательная функция, $0 < a < 1$

b) Переходим к случаю, когда основание показательной функции больше единицы, то есть, $a > 1$.

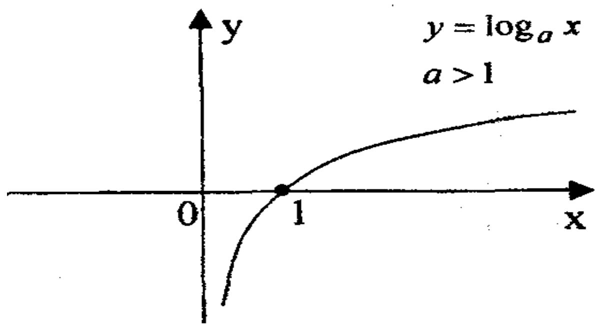
В качестве иллюстрации приведем график показательной функции (рис. 15). При других значениях основания, больших единицы, графики показательных функции будут иметь схожий вид.



Р и с. 15. Показательная функция, $a > 1$.

2.3.5 Логарифмическая функция

Следующей основной элементарной функцией является логарифмическая, когда $a \neq 0$. Логарифмическая функция определена лишь для положительных значений аргумента, то есть, при $x \in (0;+\infty)$.

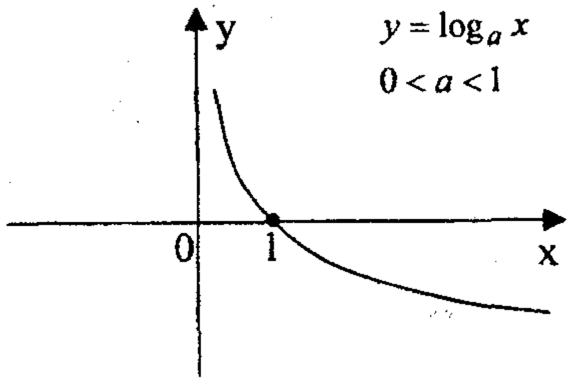


Р и с. 16. Логарифмическая функция $a > 1$

График логарифмической функции принимает различный вид в зависимости от значения основания a.

Рассмотрим случай, когда $0 < a < 1$.

Для примера приведем график логарифмической функции (рис. 17). При других значениях основания, не превосходящих единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.



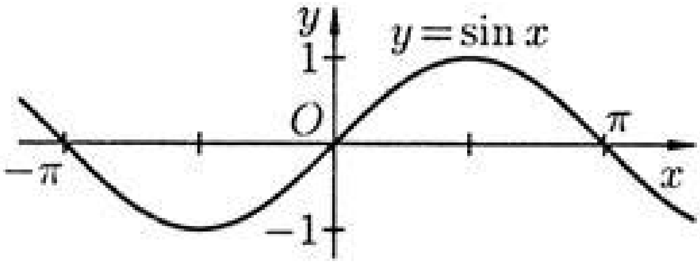
Р и с. 17. Логарифмическая функция $0 < a < 1$

2.3.6 Тригонометрические функции, их свойства и графики

Тригонометрическим функциям присуще понятие периодичности (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода $f(x+T) = f(x)$, где T – период), поэтому, в список свойств тригонометрических функций добавлен пункт *«наименьший положительный период»*.

Также для каждой тригонометрической функции мы укажем значения аргумента, при которых соответствующая функция обращается в ноль.

Функция $y = \sin x$. Построим ее график (рис. 18).

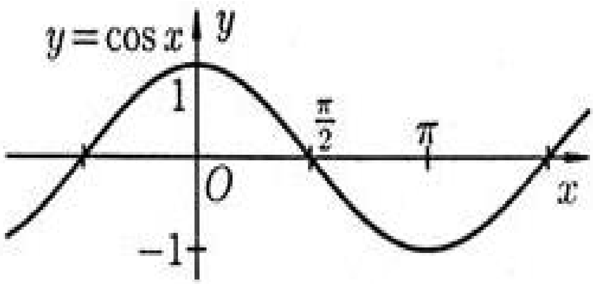


Р и с. 18. Функция $y = \sin x$

Свойства функции: $y = \sin x$. Областью определения функции является все множество действительных чисел, то есть, функция $y = \sin x$ определена при $\boldsymbol{x} \in (-\infty;+\infty)$.

- Наименьший положительный период функции равен $T = 2\pi$,
- Функция обращается в ноль при $x = \pi k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Функция принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $\boldsymbol{y} \in [-1;1]$.
- Функция – нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

Функция $y = \cos x$ (рис. 19).

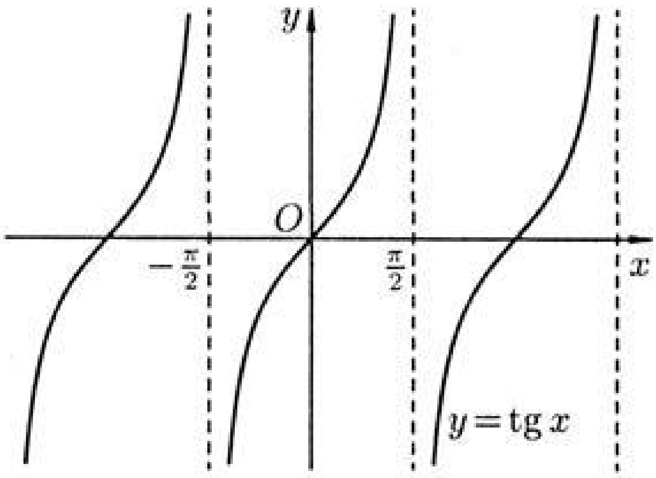


Р и с. 19. Функция $y = \cos x$

Свойства функции $y = \cos x$:

- Область определения функции: $\boldsymbol{x} \in (-\infty;+\infty)$.
- Наименьший положительный период функции $y = cosx$ равен $T = 2\pi$.
- Функция обращается в ноль при $\boldsymbol{x} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции представляет интервал от минус единицы до единицы включительно: $y \in [-1;+1]$.
- Функция – четная, так как $\boldsymbol{y}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 20).



Р и с. 20. Функция $y = \operatorname{tg} x$

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$:

- Область определения функции: $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.

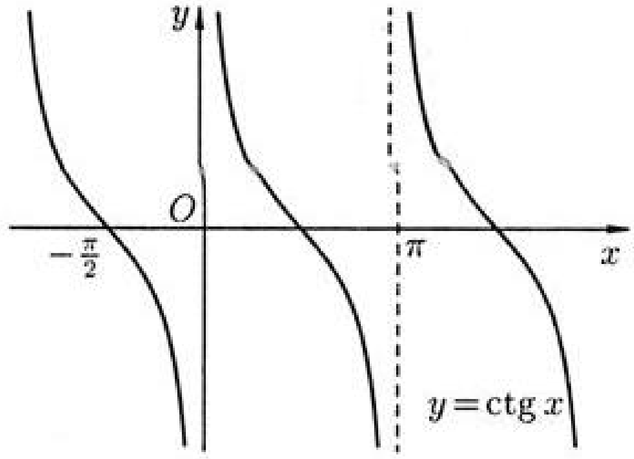
Поведение функции $y = \operatorname{tg} x$ на границе области определения

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} = \pi k + 0} tg\left(x\right) = -\infty, \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2} k - 0} tg(x) = +\infty$$

Следовательно, прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$, являются вертикальными асимптотами.

- Наименьший положительный период функции $T = \pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \pi k$, *где* $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции $y = tgx$: $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция - нечетная, так как y(-x)=-y(x) .
- Функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + gk\right), k \in Z$.

Функция y = ctgx (рис. 21).



Р и с. 21. Функция y = ctgx

Свойства функции y = ctgx.

- Область определения функции: $x \in (\pi k; \pi + \pi k)$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.

Поведение на границе области определения

$$\lim_{x \to \pi k + 0} tg(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \pi k - 0} tg(x) = -\infty$$

Следовательно, прямые $x = \pi k$, где k ϵ z являются вертикальными асимптотами.

- Наименьший положительный период функции y = ctg$x$ равен:

$$T = \pi.$$

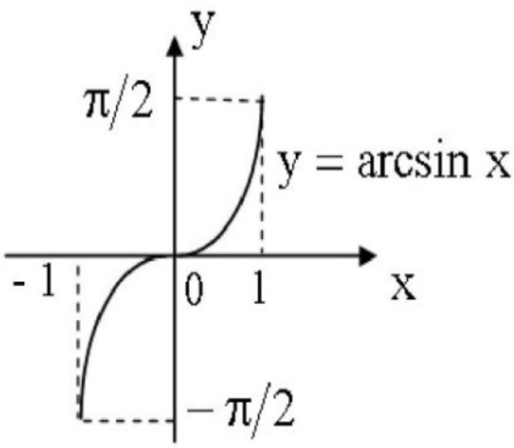
- Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции: $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция y = ctgx убывает при $x \in (\pi k; \pi + \pi k), k \in Z$

2.3.7 Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики

Обратные тригонометрические функции являются основными элементарным функциями.

Рассмотрим их графики.

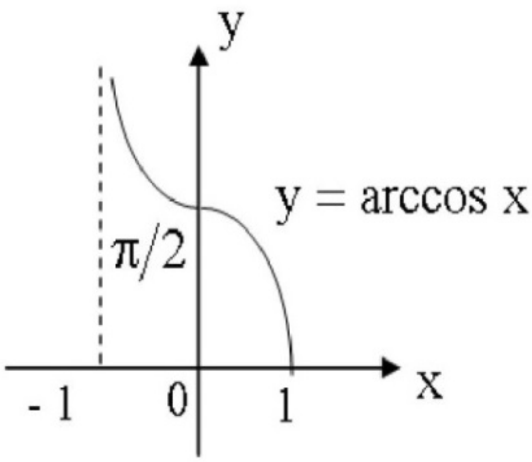
Функция $y = \arcsin x$ (рис. 22).



Р и с. 22. Функция $y = \arcsin x$

Функция $y = \arccos x$.

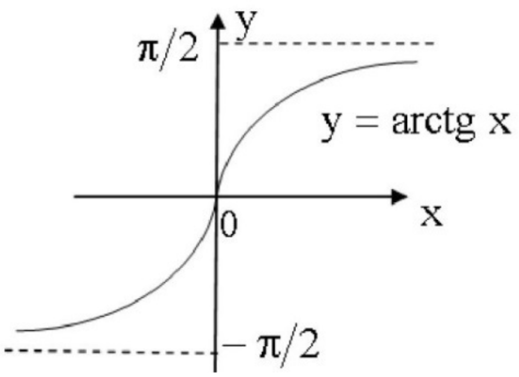
График функции имеет вид (рис. 23):



Р и с. 23. Функция $y = \arccos x$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$.

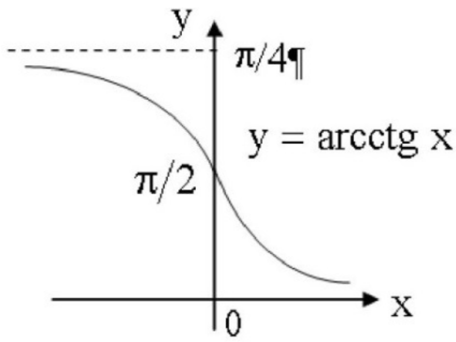
График функции имеет вид (рис. 24):



Р и с. 24. Функция $y = arctgx$

Функция $y = \mathrm{arctg} x$.

Изобразим график функции на рис. 25:



Р и с. 25. Функция $y = arcctgx$

2.4 Вопросы для самопроверки:

1. Дать определение понятиям функция, область определения, область значений.
2. Какая функция называется возрастающей? убывающей?
3. Назовите достаточные признаки экстремума функции.
4. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой?
5. Какова общая схема исследования функции?
6. Дайте определение постоянной функции.
7. Свойства степенной функцией.
8. Что понимается под показательной функцией?
9. График логарифмической функцией.
10. Виды тригонометрических функций.

3 ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [1], [2], [4], [6], [7].

3.1 Понятие предела

Пусть функция *y=f(x)* определена в окрестности точки $x = a$ (но в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена).

Число A называется ***пределом функции*** *y=f(x)* при $x \to a$, если для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех *x,* удовлетворяющих $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство:

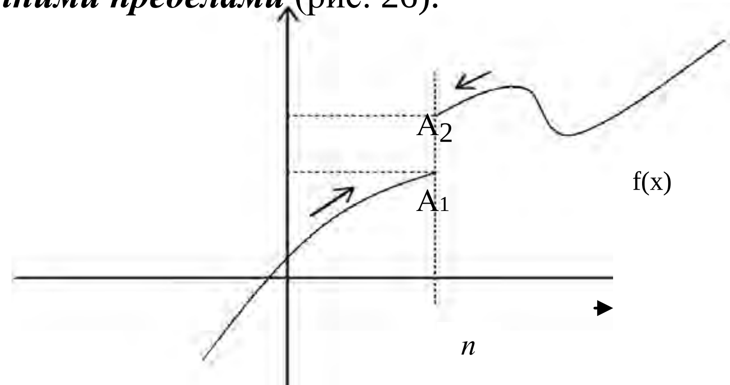
$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Запись предела функции в точке:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Если последовательность значений аргумента стремится к числу $\boldsymbol{a}$, оставаясь меньше $\boldsymbol{a}$ $(x_n < a)$, а соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3),..., f(x_n),\ldots$ имеет своим пределом число A_1, то это число называют ***пределом слева*** функции $f(x)$ и обозначают $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A_1$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$.

Если же последовательность значений аргумента $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \ldots$ стремится к числу $\boldsymbol{a}$, оставаясь больше $\boldsymbol{a}$, $x_n > a$, а соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), f(x_3),..., (x_n),.$ имеет своим пределом число A_2, то это число называют ***пределом справа*** функции $f(x)$ и обозначают $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A_2$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$. Левый и правый пределы функции называют ***односторонними пределами*** (рис. 26).



Р и с. 26. Односторонние пределы функции

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами и обозначают обычно греческими буквами $\alpha, \beta, \dots$ и т.д. Нуль – единственная постоянная, которая является бесконечно малой, поскольку $\lim\limits_{x\to a} 0 = 0$.

Бесконечно большая величина обозначается знаком ∞. Это неограниченно возрастающая функция.

Теоремы о пределах:

1. Функция может иметь только один предел при $x \to a$.

2. Предел постоянной равен самой этой постоянной: $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

3. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm \phi(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} \phi(x).$$

4. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot \phi(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \phi(x).$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}\left(c \cdot f(x)\right) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

6. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций (при условии, что $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) \neq 0$)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \phi(x)}.$$

Таблица основных свойств пределов:

1. $[0\cdot c]=0$.

2. $\left[\dfrac{0}{c}\right]=0$, где $c\neq 0$.

3. $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ – неопределенность.

4. $\left[\dfrac{c}{0}\right]=\infty$, где $c\neq 0$.

5. $[0\cdot\infty]$ – неопределенность.

6. $[c\cdot\infty]=\infty$, где $c\neq 0$.

7. $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ – неопределенность.

8. $\left[\dfrac{c}{\infty}\right]=0$.

9. $[\infty-\infty]$ – неопределенность.

10. $\left[\dfrac{\infty}{c}\right]=\infty$.

11. $[\infty+c]=\infty$.

3.2 Правила раскрытия неопределенностей.

Вычисление пределов следует начинать с подстановки в выражение функции вместо переменной её предельного значения. Если в результате получается неопределённость одного из рассмотренных выше видов, то её необходимо раскрывать, используя формулы преобразования алгебраических выражений.

Пример 15.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения аргумента $x=2$ приводит к неопределенному выражению вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

При $x\to 2$ числитель и знаменатель дроби – бесконечно малые величины. Чтобы раскрыть такого вида неопределенность, необходимо предварительно дробь преобразовать.

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби и сократим их на $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{9}{5}\quad .$$

Заметим, что аргумент x только стремится к своему предельному значению 2, но не совпадает с ним.

Следовательно, разность, т.е. множитель, на который мы сокращаем, отличен от нуля при $x\to 2$.

Пример 16.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-3x+1}{2x^3+x^2-5}$.

Решение.

При $x\to\infty$ получаем неопределённое выражение $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Чтобы найти предел дробно-рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при $x\to\infty$, необходимо предварительно числитель и знаменатель дроби разделить на x^n, где n – наивысшая степень многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Разделим числитель и знаменатель данной дроби на x^3 и применим основные теоремы о пределах, свойства бесконечно малых величин:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3x+1}{2x^3+x^2-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}}=\frac{3}{2}.$$

Пример 17.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x-2}==\frac{6}{1}=6.$$

Решение.

Вычисляем предел отношения многочленов при $x\to x_0$, когда оба многочлена стремятся к нулю и раскрываем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ путем разложения этих многочленов на множители и сокращения на $(x-x_0)$.

Пример 18.

$$\lim_{x\to2}\frac{2x-4}{\sqrt{5x-1}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{2x-4}{\sqrt{5x-1}-3}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+3}{\sqrt{5x-1}+3}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{\left(\sqrt{5x-1}\right)^2-3^2}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{5x-1-9}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{5(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{2\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{5}=\frac{2\left(\sqrt{2\cdot5-1}+3\right)}{5}=\frac{12}{5}$$

Решение.

При вычислении пределов от иррациональных функций, если получается неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, освобождаемся от иррациональности, умножая и деля на сопряженное выражение, используя формулы:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b,$$
$$\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a\pm b.$$

<u>Пример19</u>.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x+5}{4-3x}=\frac{2\cdot 2^2-3\cdot 2+5}{4-3\cdot 2}=-\frac{7}{2}.$$

<u>Пример20</u>.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3}=\frac{2^2-4}{3}=\frac{0}{3}=0$$

<u>Пример 21</u>.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-3x+1}{5x}=\frac{0^2-3\cdot 0+1}{5\cdot 0}=\frac{1}{0}=\infty$ (Конечный предел функции не существует).

Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ раскрываем путем деления числителя и знаменателя на высшую степень переменной:

<u>Пример 22</u>.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+4}{6x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{6+\frac{1}{x^2}}=\frac{5-0+0}{6+0}=\frac{5}{6}.$$

<u>Решение.</u>

Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ раскрываем путем деления числителя и знаменателя на высшую степень переменной.

<u>Пример 23</u>.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+1}{4x^2+5x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{3-0+0}{0+0}=\frac{3}{0}=\infty.$$

Первый замечательный предел.

Предел вида $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (1)$$

называют ***первым замечательным пределом***. Он выражает отношение синуса бесконечно малого аргумента к самому этому аргументу и раскрывает неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=1$, то α и β называют **эквивалентными бесконечно малыми** при $x\to a$, и обозначаются $\alpha \approx \beta$.

Учтем, что при $x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Пример 24.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

Пример 25.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x\cdot 1}==2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

Пример 26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

Второй замечательный предел.

Вторым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}, \qquad (2)$$

который раскрывает неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$.

Он может быть записан и в другом виде: если положить $1/x=\alpha$, тогда $\alpha=1/x\to 0$, получим $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$,

где e – число иррациональное.

Его приближенное значение с точностью до 10^{-6} составляет $\mathrm{e}=2{,}718282\ldots$.

Пример 27.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}\cdot 4}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^4=\mathrm{e}^4.$$

Пример 28.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x}.$$

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{3}{x}}=\dfrac{2}{2}=1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-3)+4}{2x-3}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}\cdot\frac{4}{2x-3}\cdot 3x}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{4}{2x-3}\cdot 3x}=\mathrm{e}^{6}.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\mathrm{e}^{2}.$$

3.3 Непрерывность функции в точке. Точки разрыва

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если существует предел функции в этой же точке и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\,. \tag{3}$$

Равенство (3) означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в её окрестности;

2) существуют левый и правый пределы функции и они равны между собой:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x),$$

т.е. функция $f(x)$ имеет предел при $x\to x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство (3).

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$, то равенство (3) можно записать в виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)=f(x_0)\ .$$

Из последнего равенства следует, что при нахождении предела непрерывной функции $y=f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции, т.е. в функцию вместо аргумента подставить его предельное значение x_0.

<u>Пример 29</u>.

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e.$$

Если хотя бы одно из трех условий непрерывности не выполняется, то функция является ***разрывной в точке*** x_0, а точка x_0 – называется ***точкой разрыва***.

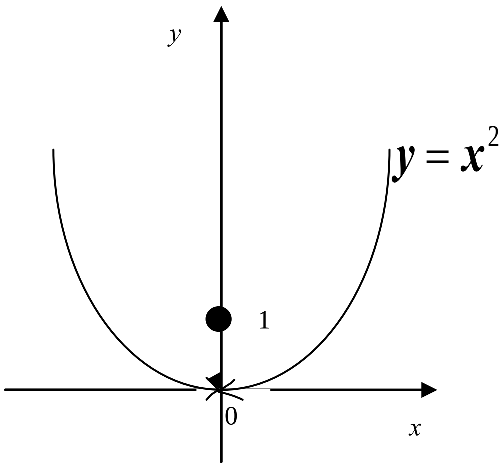
Точками разрыва первого рода называют точки, в которых левый и правый пределы конечны и существуют:

а) x_0 – ***точка устранимого разрыва***, когда левый и правый пределы равны между собой, но не равны значению функции в точке (см. рис. 27),т.е.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) \neq f(x_0).$$

Например, задана функция:

$$y = \begin{cases} x^2, & |x| > 0; \\ 1\ , & x = 0. \end{cases}$$



Р и с. 27. Точка устранимого разрыва

$x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва.

б) x_0 – ***точка конечного скачка***, когда левый и правый пределы не равны между собой (см. рис. 29), т.е.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

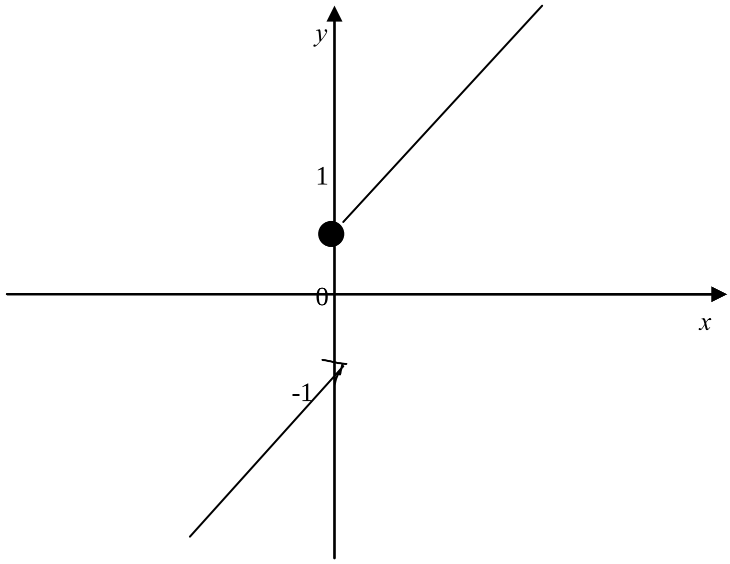
Пусть задана функция:

$$y = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ x-1\ , & x < 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0.$$

Вычислим односторонние пределы:

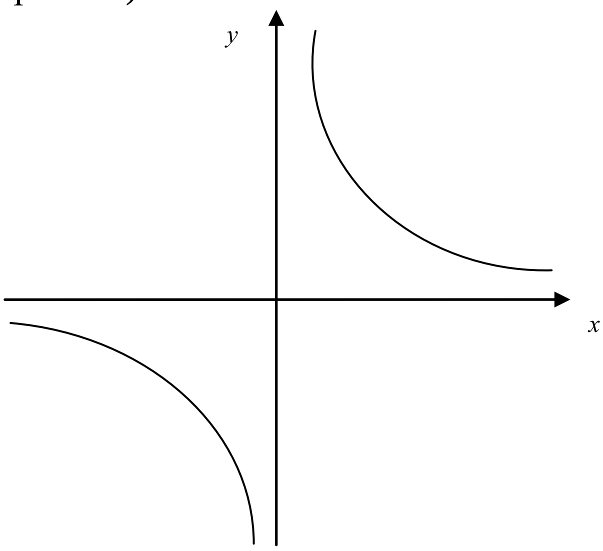
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1, \ \lim_{x \to 0-} f(x) = -1.$$

Видим, что они не равны между собой, следовательно, $x_0 = 0$ – точка конечного скачка.



Р и с. 28. Точка конечного скачка

Точками бесконечного разрыва второго рода называются точки, в которых один или оба односторонних предела не существуют или равны бесконечности (см. рис. 29).



Р и с. 29. Точка бесконечного разрыва второго рода

<u>Пример 30.</u>

$f(x) = 1/x$.

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty.$$

$x_0 = 0$ – точка бесконечного разрыва второго рода.

3.4 Вопросы для самопроверки:

1. Дать определение предела функции в точке.
2. Понятие функции непрерывной в точке.
3. Перечислите основные свойства пределов.
4. Что понимается под точкой разрыва?
5. В каком случае говорят о левостороннем/правостороннем пределе функции?
6. Написать формулы 1-го и 2-го замечательных пределов.
7. Виды неопределенностей и приемы для их раскрытия.
8. Определения бесконечно малой и бесконечно большой величин при $x \to x_0$ и $x \to \infty$. Привести графическую иллюстрацию.
9. Односторонние пределы функции в точке. Привести примеры вычисления таких пределов.
10. Описать различные условия непрерывности функции в точке и на интервале.

4 ПРОИЗВОДНАЯ. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [3], [6], [7], [9].

4.1 Определение производной. Ее геометрический смысл

Пусть заданы функция $y = f(x)$ и x_0 – точка из области ее определения (рис. 32).

Тогда ***производной функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

Наиболее употребительны следующие обозначения производной:

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx}.$$

Итак, по определению

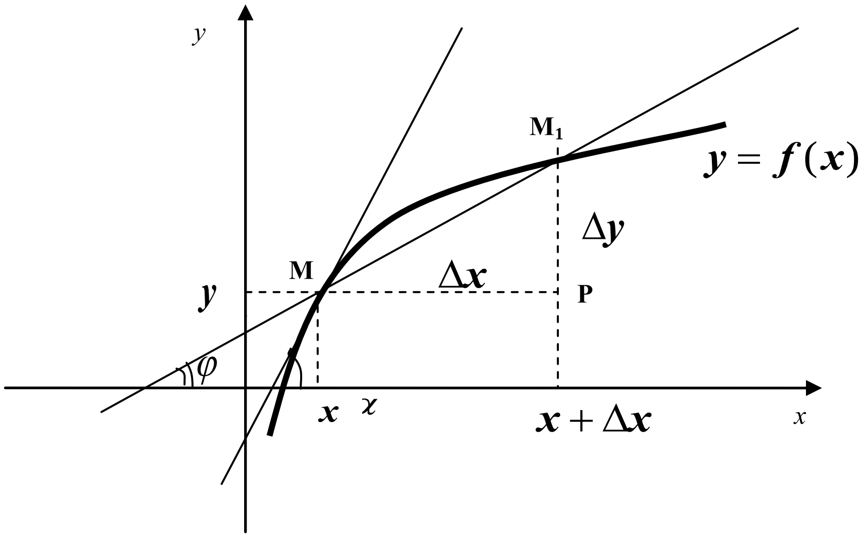
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;b)$, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале, а операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Необходимое условие дифференцируемости функции в точке: если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Выясним *геометрический смысл производной*.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (см. рис. 30).



Р и с. 30. Производная функции

Вычислим угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $\boldsymbol{M}$, т.е. величину $\boldsymbol{k} = \operatorname{tg}\alpha$.

Для этого проведем секущую через точки $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_1$.

Найдем угловой коэффициент секущей $\boldsymbol{k}_1 = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}$.

Пусть точка $\boldsymbol{M}_1$ неограниченно приближается по кривой $\boldsymbol{L}$ к точке $\boldsymbol{M}$, тогда $\Delta \boldsymbol{x} \to 0$, а секущая приближается к касательной.

При этом $\angle\varphi \to \angle\alpha$ и $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$.

Тогда угловой коэффициент касательной есть предел углового коэффициента секущей:

$$\boldsymbol{k} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}.$$

В правой части этого равенства стоит производная функции.

В этом и состоит ее ***геометрический смысл*****:** производная функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $\boldsymbol{x}$.

Запишем равенство $\boldsymbol{k} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}$ в виде:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда *уравнение касательной* к кривой $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ имеет вид:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \qquad (5)$$

а *уравнение нормали:*

$$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=-\frac{1}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0). \qquad (6)$$

Для справок приведем основные правила и формулы дифференцирования.

4.2 Правила дифференцирования

Таблица производных:

1. $(c\cdot u)'=c\cdot u'$, где с – любое число.
2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.
3. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$.
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$.
5. $c'=0$.
6. $x'=1. \quad t'=1.$
7. $\left(u^a\right)'=a\cdot u^{a-1}\cdot u'$, где a – любое действительное число,

$$\left(\frac{1}{u}\right)'=\left(u^{-1}\right)'=-\frac{u'}{u^2}. \qquad \left(\sqrt{u}\right)'=\left(u^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

8. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.
9. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$.
10. $(\mathrm{tg\ u})'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$.
11. $(\mathrm{ctg\ u})'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.
12. $\left(a^u\right)'=u'\cdot a^u\cdot\ln a, \quad \left(e^u\right)'=u'\cdot e^u$.
13. $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u\cdot\ln a}, \quad (\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.
14. $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

15. $\left(\arccos u\right)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

16. $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

17. $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$.

Пример 31.

Найти производные заданных функций:

а) $y = 2x^4 - \dfrac{5}{x^3} - 9 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 1;$

б) $y = \dfrac{\ln 10x}{x^3 - 1};$

в) $y = \sqrt{e^x - 6x}.$

Решение.

а) Вводя дробные и отрицательные показатели, будем иметь

$$y = 2x^4 - 5x^{-3} - 9x^{\frac{2}{3}} + 1.$$

Применяя правила дифференцирования суммы (2) таблицы производных, формулу дифференцирования степенной функции (7) таблицы производных и формулу дифференцирования постоянной (5) таблицы производных, получаем:

$$y' = 2 \cdot 4x^3 - 5 \cdot (-3)x^{-4} - 9 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 8x^3 + \frac{15}{x^4} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) применяя правило дифференцирования дроби (4) таблицы производных, получим:

$$y' = \frac{(\ln 10x)'\left(x^3 - 1\right) - \ln 10x\left(x^3 - 1\right)'}{\left(x^3 - 1\right)^2}.$$

При этом по формуле (7) таблицы производных:

$$\left(x^3 - 1\right)' = 3x^2,$$

а по формуле (13) таблицы производных:

$$\left(\ln 10x\right)' = \frac{1}{10x}\left(10x\right)' = \frac{1}{10x}\cdot 10 = \frac{1}{x}.$$

Отсюда:

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\left(x^3-1\right) - \left(\ln 10x\right)\cdot 3x^2}{\left(x^3-1\right)^2} = \frac{1}{x\left(x^3-1\right)} - \frac{3x^2 \ln 10x}{\left(x^3-1\right)^2}.$$

в) под знаком производной имеем сложную функцию вида $y=\sqrt{u}$, где $u=e^x-6x$ – промежуточный аргумент. Используя формулу (7) таблицы производных, получим:

$$y' = \left(\sqrt{e^x-6x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{e^x-6x}}\cdot\left(e^x-6x\right)'.$$

Далее, применяя формулы (1), (12) таблицы производных, найдем

$$\left(e^x-6x\right)' = e^x-6.$$

Тогда

$$y' = \frac{e^x-6}{2\sqrt{e^x-6x}}.$$

Производная сложной функции:

Пусть задана сложная функция $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}\left(\varphi(\boldsymbol{x})\right)$ с промежуточным аргументом $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}$.

Тогда производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}'_{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{x}}. \tag{7}$$

<u>Пример 32</u>.

Найти производную функции $\boldsymbol{y}=\sin^2\boldsymbol{x}$.

<u>Решение.</u> Данная функция является сложной степенной функцией $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{u}^2$, промежуточным аргументом которой служит $\boldsymbol{u}=\sin\boldsymbol{x}$.

Поэтому, дифференцируя по формуле (7) и формулам (7), (8) таблицы производных, получим:

$$\boldsymbol{y}' = 2\sin^1 \boldsymbol{x} \cdot (\sin \boldsymbol{x})' = 2\sin \boldsymbol{x} \cdot \cos \boldsymbol{x} = \sin 2\boldsymbol{x}.$$

Пример 33.
Найти производную функции

$$\boldsymbol{y} = \operatorname{tg} \sqrt{\boldsymbol{x}}.$$

Решение. Функция является сложной вида $\boldsymbol{y} = \operatorname{tg} \boldsymbol{u}$, промежуточным аргументом которой служит $\boldsymbol{u} = \sqrt{\boldsymbol{x}}$.

Дифференцируя по формуле (7) и формулам (7), (10) таблицы производных, получим:

$$\boldsymbol{y}' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\boldsymbol{x}}} \cdot \left(\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{x}} \cdot \cos^2 \sqrt{\boldsymbol{x}}}.$$

Производная неявной функции:

Если $\boldsymbol{y}$ есть ***неявная функция*** от $\boldsymbol{x}$, т.е. задана уравнением $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, не разрешенным относительно $\boldsymbol{y}$, то для нахождения ее производной $\boldsymbol{y}'$ нужно продифференцировать по $\boldsymbol{x}$ обе части равенства, помня, что $\boldsymbol{y}$ есть функция переменной $\boldsymbol{x}$, и затем разрешить полученное равенство относительно $\boldsymbol{y}'$.

Пример 34.
Найти производную функции, заданной уравнением

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{y}^3 = 0.$$

Решение. Продифференцируем обе части уравнения, считая $\boldsymbol{y}$ функцией переменной $\boldsymbol{x}$.

Получим:

$$\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}}\right)' + \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{y}^2\right)' + \left(\boldsymbol{y}^3\right)' = 0,$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}' + 3\boldsymbol{y}^2 \cdot \boldsymbol{y}' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{e^{x} + y^2}{2xy + 3y^2}.$$

Дифференциал функции.

Из определения производной $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и понятия предела следует

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha,$$

где α – бесконечно малая величина.

Выразив из этого равенства приращение функции, получим

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x \ .$$

Если $y' \neq 0$, то в правой части последнего равенства первое слагаемое линейно относительно Δx, а второе слагаемое – бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем первое, поэтому при малых значениях Δx приращение функции можно заменить его главной частью $y'\Delta x$, т.е.

$$\Delta y \approx y'\Delta x.$$

Эту главную часть приращения функции называют *дифференциалом* данной функции в точке и обозначают:

$$dy = y'\Delta x \text{ или } dy = y'dx. \qquad (8)$$

Пример 35.

Найти дифференциал функции $y = x^5$.

Применяя формулу (8) и формулу (7) таблицы производных, находим

$$dy = 5x^4 dx.$$

Производные высших порядков:

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется ***производной второго порядка*** функции $y = f(x)$ и обозначается:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Производной n-го порядка называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' . \tag{9}$$

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках, например, y^{V} или $y^{(5)}$.

<u>Пример 36</u>.

Найти производную четвертого порядка от функции $y = e^{2x}$.

<u>Решение.</u> Применяя формулу (9), получим

$y' = 2e^{2x}$,

$y'' = 4e^{2x}$,

$y''' = 8e^{2x}$,

$y^{(4)} = 16e^{2x}$.

4.3 Вопросы для самопроверки:

1. Какая функция называется дифференцируемой?
2. Как называется операция нахождения производной?
3. Дать определение производной функции в точке.
4. Геометрический смысл производной функции в точке.
5. Как найти угловой коэффициент касательной к графику функции?
6. Чему равна производная степенной функции?
7. Чему равна производная сложной функции?
8. Формулы производной тригонометрических функций.
9. Как называются точки, в которых производная равна нулю?
10. В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции?

5 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [1], [3], [6], [8].

5.1 Достаточные условия возрастания и убывания функции на отрезке

Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка (a, b), то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

Точка x_0 есть точка ***максимума*** для функции $y = f(x)$, если для любой точки x, принадлежащей некоторой окрестности $\delta(x_0)$, выполняется неравенство:

$$f(x) < f(x_0), \ x \in \delta(x_0), \ x \neq x_0.$$

Точка x_0 есть точка ***минимума,*** если $f(x) > f(x_0)$, $x \in \delta(x_0)$, $x \neq x_0$.

Необходимое условие существования экстремума:

Если в точке x_0 дифференцируемая функция имеет экстремум, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются ***критическими***.

Критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

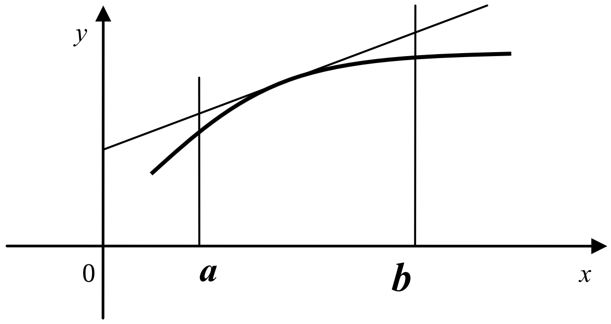
Достаточные условия существования экстремума:

Теорема 1. Если при переходе через критическую точку x_0 производная дифференцируемой функции меняет знак, то точка x_0 – точка экстремума. Если знак меняется с «+» на «–», то x_0 – точка максимума, а если с «–» на «+», то – точка минимума.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема, x_0 – ее критическая точка, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 есть точка экстремума: максимума, если $f''(x_0) < 0$; минимума, если $f''(x_0) > 0$.

5.2 Достаточные условия выпуклости графика функции

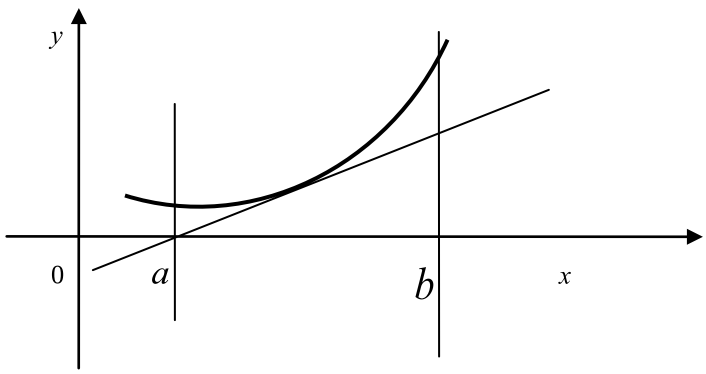
График дифференцируемой функции называется ***выпуклым вверх*** в интервале $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, если в этом интервале он расположен ниже любой своей касательной, кроме точки касания (см. рис. 31).



Р и с. 31. Выпуклость вверх графика функции

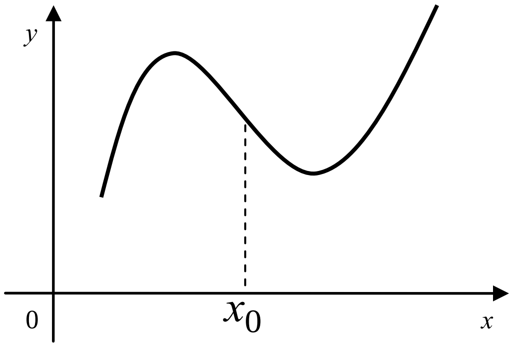
График дифференцируемой функции называется ***выпуклым вниз*** на интервале $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, если на этом интервале он расположен выше любой своей касательной, кроме точки касания (см. рис. 32).

Если для функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, дважды дифференцируемой во всех точках интервала $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0) < 0$, то кривая $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ выпукла вверх в этом интервале; если $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0) > 0$ во всех точках интервала $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, то кривая $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ выпукла вниз в этом интервале.



Р и с. 32. Выпуклость вниз графика функции

Точка графика непрерывной функции, в которой изменяется характер выпуклости, называется ***точкой перегиба*** (см. рис. 33).



Р и с. 33. Точка перегиба

Необходимое условие существования точки перегиба:

Вторая производная дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке перегиба x_0 равна нулю, т.е.

$$f''(x_0) = 0.$$

Достаточное условие существования точки перегиба:

Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, т.е. $f''(x_0) = 0$, и при переходе через эту точку меняет свой знак, то точка x_0 есть точка перегиба ее графика.

5.3 Общая схема исследования функции

1. Находим область определения функции, т.е. значения аргумента, при которых функция $y = f(x)$ принимает действительные значения.

2. Исследуем функцию на четность, нечетность. Помним, что для *четной* функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, и график ее будет симметричен относительно оси Oy; для *нечетной* функции – $f(-x) = -f(x)$, и график ее будет симметричен относительно начала координат.

3. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

4. Определяем интервалы непрерывности функции и точки разрыва (если они существуют). При этом помним, что элементарные функции непрерывны в тех точках, в которых они определены.

5. Находим вертикальные асимптоты, если существуют точки бесконечного разрыва. Исследуем поведение графика функции $y = f(x)$

слева и справа от этих точек, для чего вычисляем односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$.

6. Исследуем поведение функции в бесконечности, находим наклонные асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx).$$

Если хотя бы один из этих пределов не является конечным, то график функции не имеет наклонных асимптот.

7. Находим интервалы возрастания, убывания функции и точки экстремума.

8. Определяем интервалы выпуклости графика и точки перегиба.

9. Строим график функции.

Пример 37.

Исследовать функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9$ *и построить ее график.*

Решение.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, т.к.

$f(-x) = -x^3 - 6x^2 + 9$, т.е. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

3. Найдем точку пересечения графика с осью Oy, приравнивая x к нулю: $y(0) = -0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 = 9$.

4. Интервалом непрерывности служит вся числовая прямая $(-\infty, \infty)$.

5. Так как точек разрыва функция не имеет, то вертикальных асимптот нет.

6. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид:

$$y = kx + b,$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9}{x} = \infty,$$

Следовательно, наклонной асимптоты нет.

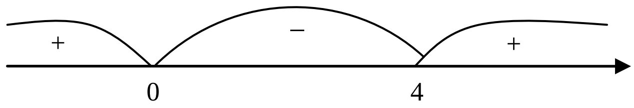
7. Интервалы монотонности и точки экстремума найдем по первой производной:

$y'(x) = 3x^2 - 12x = 0,$

$3x(x - 4) = 0,$

$x_1 = 0, \; x_2 = 4.$

Исследуем знак производной слева и справа от критических точек:



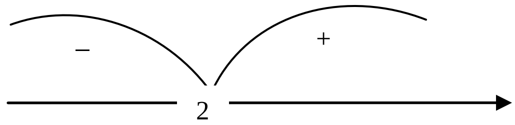
Р и с. 34. Исследование возрастание/убывание

При переходе через точки производная меняет знак, следовательно, $\boldsymbol{x}=0$ – точка максимума, а $\boldsymbol{x}=4$ – точка минимума функции.

8. Интервалы выпуклости и точку перегиба определяем по второй производной:

$$\boldsymbol{y}''=6\boldsymbol{x}-12,\ 6\boldsymbol{x}-12=0,\ x=2.$$

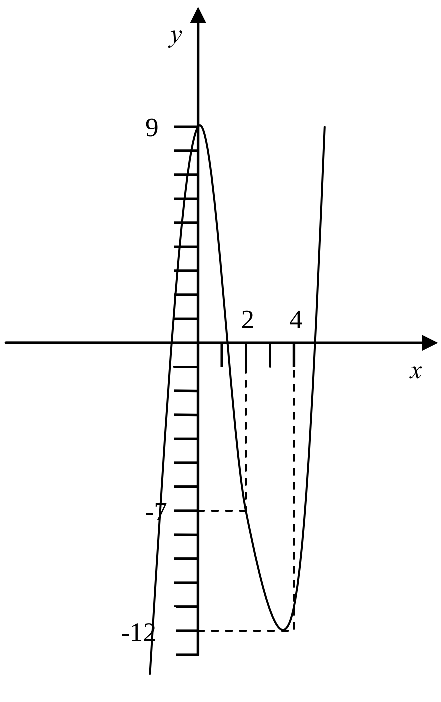
Исследуем знак второй производной слева и справа от точки $x=2$:



Р и с. 35. Исследование выпуклости/вогнутости

Так как при переходе через точку $\boldsymbol{x}=2$ вторая производная меняет знак, то эта точка является точкой перегиба.

9. По полученным данным строим график функции (рис. 36).



Р и с. 36. График функции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^3-6\boldsymbol{x}^2+9$

5.4 Вопросы для самопроверки:

1. Какая зависимость называется функцией?
2. Дать определение понятиям область определения, область значений.
3. Какая функция называется возрастающей?
4. Назовите необходимые условия существования экстремума функции.
5. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой?
6. Назовите схему исследования функции и построения ее трафика.
7. Сформулируйте достаточное условие существования перегиба функции.
8. Какая функция называется убывающей?
9. Сформулируйте достаточное условие выпуклости вниз/вверх функции.

6 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [4], [3], [5], [8].

6.1 Первообразная функции. Неопределенный интеграл, его свойства

Задачей дифференциального исчисления являлось нахождение для каждой функции её производной.

Поставим обратную задачу: для данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$.

Например, для функции $f(x)=x^3$ этому условию удовлетворяет функция $F(x)=\dfrac{x^4}{4}$, т.к.

$$F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=\frac{1}{4}\cdot 4x^3=x^3=f(x).$$

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** *функции* $f(x)$ на интервале (a, b), если для любого $x\in(a, b)$ выполняется равенство:

$$F'(x)=f(x) \text{ или } dF(x)=f(x)dx.$$

Множество всех первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается:

$$\int f(x)dx\ .$$

Таким образом, по определению:

$$\int f(x)dx=F(x)+C\,, \qquad (10)$$

где C – произвольная постоянная, $\int$ – знак неопределённого интеграла.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$;
2. $d\int f(x)dx=f(x)dx$;
3. $\int d\,F(x)=F(x)+C$;
4. $\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx$;

5. $\int\left(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right)dx =$

$= \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$;

6. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(u)du = F(u)+C$, где $u=u(x)$ есть непрерывная функция от x.

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;

   $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

   $\int e^x dx = e^x + C$;
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
9. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$;
10. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$;
11. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;
12. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$;
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$;
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

6.2 Основные методы интегрирования

1) Метод непосредственного интегрирования.

Метод основан на применении свойств неопределенного интеграла и использовании таблицы основных интегралов.

Пример 38.

$$\int\left(4\sqrt{x}+6x^2-\frac{3}{x}\right)dx.$$

Решение. Применяя свойства 4, 5 неопределенного интеграла и формулы таблицы интегралов получим:

$$\int\left(4\sqrt{x}+6x^2-\frac{3}{x}\right)dx=4\int\sqrt{x}dx+6\int x^2dx-3\int\frac{dx}{x}=$$

$$=4\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+6\cdot\frac{x^3}{3}-3\ln|x|+C=\frac{8}{3}\sqrt{x^3}+2x^3-3\ln|x|+C.$$

Пример 39.

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cdot\cos^2x}.$$

Решение. Представим числитель подынтегральной дроби, равный единице, в виде $\sin^2x+\cos^2x$:

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cdot\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}dx=$$

$$=\int\frac{\sin^2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}dx+\int\frac{\cos^2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=$$

$$=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

2) Метод замены переменной.

Метод замены переменной (подстановки) при нахождении неопределенного интеграла $\int f(x)dx$ состоит в применении формулы:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (11)$$

После нахождения интеграла в правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования $\boldsymbol{t}$ назад к переменной $\boldsymbol{x}$.

Пример 40.

$$\int \mathrm{e}^{\frac{x}{5}} dx.$$

Решение. Обозначим $x = 5t$, тогда $dx = 5dt$, следовательно,

$$\int \mathrm{e}^{\frac{x}{5}} dx = 5\int \mathrm{e}^{t} dt = 5\mathrm{e}^{t} + C = 5\mathrm{e}^{\frac{x}{5}} + C.$$

Пример 41.

$$\int x\sqrt{x+4}\, dx.$$

Решение. Пусть $\sqrt{x+4} = t$, тогда $x = t^2 - 4$, $dx = 2t\, dt$, следовательно:

$$\int x\sqrt{x+4}\, dx = \int \left(t^2 - 4\right) \cdot t \cdot 2t\, dt = 2\int \left(t^2 - 4\right) t^2\, dt =$$

$$= 2\int \left(t^4 - 4t^2\right) dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{4t^3}{3}\right) + C =$$

$$= \frac{2(x+4)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4(x+4)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Пример 42.

$$\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

Решение. Пусть $1 + \operatorname{tg} x = t$, тогда $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$,

Следовательно

$$\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \int \sqrt{t}\, dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\operatorname{tg} x\right)^3} + C.$$

Пример 43.

$$\int \frac{dx}{x\left(2+\ln x\right)}.$$

Решение. Пусть $2+\ln x = t$, тогда $dt = \dfrac{dx}{x}$, следовательно,

$$\int \frac{dx}{x(2+\ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|2+\ln x| + C.$$

Пример 44.

Вычислить $\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + \dfrac{6}{x^2}\right) dx;$

Решение. Предварительно преобразуем подынтегральную функцию и затем применим свойства неопределённого интеграла и формулу (3) из таблицы интегралов:

$$\int \left(4x^3 - \sqrt{x} + \frac{6}{x^2}\right) dx = \int \left(4x^3 - x^{\frac{1}{2}} + 6x^{-2}\right) dx =$$

$$= 4\int x^3 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + 6\int x^{-2} dx = 4\frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6\frac{x^{-1}}{-1} + c =$$

$$= x^4 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{6}{x} + c.$$

Пример 45.

Вычислить $\int \dfrac{4x^2 dx}{x^3+5};$

Решение. Воспользуемся подстановкой $u = x^3 + 5$, тогда $du = 3x^2 dx$, откуда $x^2 dx = du/3$. Таким образом,

$$\int \frac{4x^2 dx}{x^3+5} = 4\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{3} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{4}{3}\ln|u| + c == \frac{4}{3}\ln\left|x^3+5\right| + c.$$

При вычислении неопределенного интеграла, полученного в результате замены переменной, мы пользовались формулой (4) таблицы интегралов.

Пример 46.

Вычислить $\int \sin^2 x \cos x \, dx.$

Решение. В неопределённом интеграле выполним замену $u=\sin x$, чтобы привести его к табличному виду. Тогда $du=\cos x\,dx$. Получим:

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+c=\frac{\sin^3 x}{3}+c.$$

При вычислении неопределенного интеграла $\int u^2du$ была использована формула (2) таблицы интегралов.

3) Метод интегрирования по частям.

В дифференциальном исчислении была получена формула дифференциала произведения двух функций:

$$\boldsymbol{d(uv)=u\,dv+v\,du}.$$

Интегрируя это равенство, получим:

$$\int \boldsymbol{d(uv)}=\int \boldsymbol{u\,dv}+\int \boldsymbol{v\,du}$$

или

$$\int \boldsymbol{u\,dv=uv}-\int \boldsymbol{v\,du}. \qquad (12)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*. Она дает возможность свести вычисление $\int \boldsymbol{u\,dv}$ к вычислению интеграла $\int \boldsymbol{v\,du}$, которой может оказаться существенно более простым, чем исходный. Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

- В интегралах вида

$$\int \boldsymbol{P(x)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{kx}}\,\boldsymbol{dx},\ \int \boldsymbol{P(x)}\sin \boldsymbol{kx\,dx},\ \int \boldsymbol{P(x)}\cos \boldsymbol{kx\,dx},$$

где $\boldsymbol{P(x)}$ – многочлен, $\boldsymbol{k}$ – число, удобно положить $\boldsymbol{u=P(x)}$, а за $\boldsymbol{dv}$ – все остальные сомножители подынтегрального выражения.

- В интегралах вида

$$\int \boldsymbol{P(x)}\arcsin \boldsymbol{x\,dx},\ \int \boldsymbol{P(x)}\arccos \boldsymbol{x\,dx},\ \int \boldsymbol{P(x)}\mathrm{arctg}\,\boldsymbol{x\,dx},$$
$$\int \boldsymbol{P(x)}\ln \boldsymbol{x\,dx}$$

удобно положить $\boldsymbol{P(x)dx=dv}$, а за $\boldsymbol{u}$ обозначить остальные сомножители.

Пример 47.

$$\int \boldsymbol{x}\mathrm{e}^{2\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}.$$

Решение.

Пусть $u = x$, $dv = e^{2x}dx$, тогда

$$du = dx, \ v = \int dv = \int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2},$$

следовательно, по формуле (12):

$$\int xe^{2x}dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

Пример 48.

$$\int x \ln x \, dx.$$

Решение.

Пусть $u = \ln x$, $dv = xdx$, тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \ v = \frac{x^2}{2},$$

следовательно, по формуле (4.1):

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Интегрирование простейших иррациональных выражений.

Интегралы вида $\int R\left(\sqrt[m]{x^p}, \sqrt[n]{x^s}\right)dx$ берутся подстановкой $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел (m, n). С помощью этой подстановки избавляемся от иррациональности.

Пример 49.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Решение.

Введем подстановку $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$, тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2(t+1)} = 6\int \frac{t^3dt}{(t+1)} = 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt =$$

$$= 6\int\left(\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 6\frac{t^3}{3} - 6\frac{t^2}{2} + 6t - 6\ln|t+1| + C = = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C$$

.

6.3 Понятие определенного интеграла

Определенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Таким образом, если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то, согласно определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ . \qquad (13)$$

Равенство (13) называется *формулой Ньютона – Лейбница*.

Разность $F(b)-F(a)$ кратко записывают $F(x)\Big|_a^b$.

Тогда, формулу (5.1) можно записывать и так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

3. $\int\limits_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx} = \int\limits_a^c \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx} + \int\limits_c^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$, где $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$;

4. $\int\limits_a^b \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{k} \cdot \int\limits_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$;

5. $\int\limits_a^b \left(\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{dx} =$

$= \int\limits_a^b \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx} + \int\limits_a^b \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx} - \int\limits_a^b \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$.

Методы вычисления определенного интеграла:

1) Метод непосредственного интегрирования

Метод основан на применении формулы Ньютона – Лейбница (13) и свойств определенного интеграла.

Пример 50.

$$\int\limits_o^\pi \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = 2.$$

2) Интегрирование заменой переменной.

Если:

а) функция $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t})$ и ее производная $\boldsymbol{x}' = \varphi'(\boldsymbol{t})$ непрерывны при $\boldsymbol{t} \in [\alpha, \beta]$;

б) множеством значений функции $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{t})$ при $\boldsymbol{t} \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$;

в) $\varphi(\alpha) = \boldsymbol{a}$, $\varphi(\beta) = \boldsymbol{b}$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dt. \qquad (14)$$

Пример 51.

Вычислить $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Положим $\sqrt{x}=t$, тогда $dx=2t\,dt$. Если $\boldsymbol{x}\in[0,4]$, то $\boldsymbol{t}\in[0,2]$.

Получим:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t}=2\int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}dt=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$=2\left[t-\ln|1+t|\right]\Big|_0^2=4-2\ln 3.$$

3) Метод интегрирования по частям.

Если функции $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ имеют непрерывные производные на отрезке $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, то имеет место формула:

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du\ . \qquad (15)$$

Пример 52.

Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$.

Решение. Введем замену $u=x$, $dv=\sin x\,dx$, тогда $du=dx$, $\boldsymbol{v}=-\cos\boldsymbol{x}$.

Применяя формулу (15), получим:

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=$$

$$=(-\pi(-1)+0)+\sin\boldsymbol{x}\Big|_0^{\pi}=\pi.$$

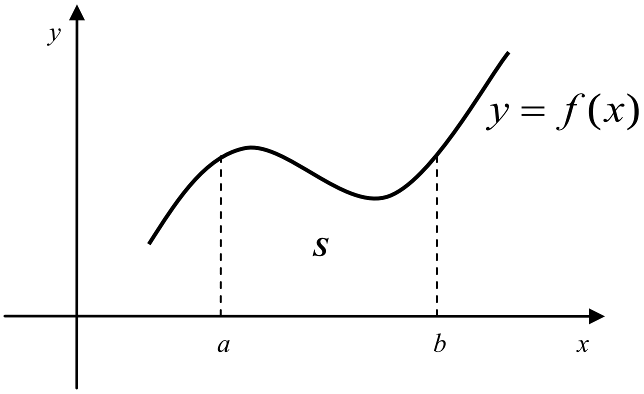
6.4 Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

Условимся приписывать площади криволинейной трапеции знак плюс, если трапеция расположена выше оси $\boldsymbol{Ox}$ и – знак минус, если трапеция расположена ниже оси $\boldsymbol{Ox}$.

Тогда определенный интеграл $\int\limits_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$ численно равен площади $\boldsymbol{S}$ криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ оси $\boldsymbol{Ox}$, кривой $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq 0$ и прямыми $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (рис. 37).

В этом состоит ***геометрический смысл определенного интеграла***. Поэтому с помощью определённого интеграла вычисляют площади криволинейных фигур:

$$\boldsymbol{S} = \int\limits_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}. \qquad (16)$$



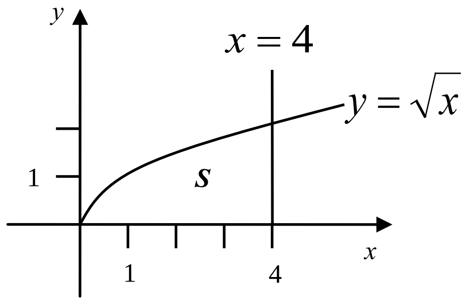
Р и с. 37. Геометрический смысл определенного интеграла

Пример 53.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $\boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{x}}$, *осью абсцисс и прямой* $\boldsymbol{x} = 4$.

Решение. Искомая фигура – криволинейная трапеция (рис. 38), площадь которой:

$$S = \int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx = \int\limits_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Bigg|_0^4 = \frac{16}{3} \text{ (кв.ед.)}.$$



Р и с. 38. Площадь криволинейной трапеции

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $\boldsymbol{y = f_1(x)}$ и $\boldsymbol{y = f_2(x)}$, прямыми $\boldsymbol{x = a}$, $\boldsymbol{x = b}$ (при условии $\boldsymbol{f_2(x) \geq f_1(x)}$) можно найти по формуле:

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (17)$$

<u>Пример 54</u>**.**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{3}(x+3)^2$ и прямой $y - x - 3 = 0$.

<u>Решение.</u> Площадь фигуры, ограниченной сверху непрерывной кривой $y = f(x)$, снизу – непрерывной кривой $y = \varphi(x)$, слева – прямой $x = a$, справа – прямой $x = b$, вычисляется по формуле (17).

Найдем точки пересечения параболы и прямой. Составим и решим систему их уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}(x+3)^2 \\ y - x - 3 = 0 \end{cases}.$$

Заменив в первом уравнение системы y на сумму $x + 3$, получим:

$$\frac{1}{3}(x+3)^2 = (x+3), \quad (x+3)^2 = 3x+9, \quad x^2 + 6x + 9 - 3x - 9 = 0,$$

$$x^2 + 3x = 0, \quad x(x+3) = 0.$$

Отсюда, $x_1 = -3; \quad x_2 = 0$. Следовательно, $y_1 = 0; \quad y_2 = 3$. Таким образом, парабола и прямая пересекаются в точках $A(-3{,}0)$ и $B(0{,}3)$.

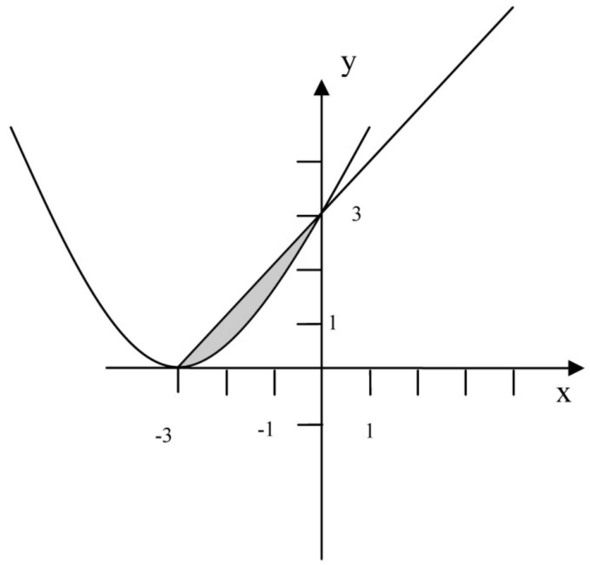
Из формулы (17) следует, что площадь фигуры равна

$$S = \int_{-3}^{0} \left[(x+3) - \frac{1}{3}(x+3)^2 \right] dx = \int_{-3}^{0} \left[x + 3 - \frac{1}{3}x^2 - 2x - 3 \right] dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} \left[-\frac{1}{3}x^2 - x \right] dx \quad = \quad \left(-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-3}^{0} = \left(-\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{-3}^{0} =$$

$$= \left(-3 - \frac{9}{2} \right) = 1{,}5 ед.кв.$$

Следовательно, искомая площадь равна 1,5 кв. ед. Рассмотренная фигура изображена на рисунке.



Р и с. 39. Иллюстрация примера 54

6.5 Вопросы для самопроверки:

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом функции?
3. Назовите основные методы интегрирования.
4. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
5. Что называется определенным интегралом функции?
6. Формула Ньютона – Лейбница для нахождения определенного интеграла.
7. Геометрический смысл определенного интеграла.
8. Что такое верхний и нижний пределы интегрирования?

7 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [4], [1], [6], [9].

7.1 Понятие функции нескольких переменных

Многим явлениям, в том числе и экономическим, присуща многогранная зависимость. Исследование таких зависимостей требует совершенствования математического аппарата, в частности, введения понятия функции нескольких переменных.

Если каждой паре (x, y) значений двух независимых друг от друга, переменных величин x и y, из некоторой области их изменения D, соответствует определенное значение величины z, то говорят, что задана ***функция z двух независимых переменных*** x и y, определенная в области D.

Примерами функций двух и нескольких переменных могут служить: площадь S прямоугольника со сторонами x и y, выражаемая формулой $S = xy$, т.е. значения S определяются совокупностью значений x и y.

Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами x, y и z, выражается формулой $V = xyz$, т.е. значения V зависят от трех переменных.

Если каждой совокупности значений переменных x, y, z…n соответствует определенное значение переменной w, то w называется ***функцией независимых переменных x, y, z…n*** и записывается $w = f\ (x,\ y,\ z\ldots)$.

Функции трех и большего числа переменных не имеют геометрического представления.

Графиком функции двух переменных $z = f(x,\ y)$ называется множество точек трехмерного пространства $(x,\ y,\ z)$, аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональным соотношением $z = f(x,\ y)$. График функции двух переменных $z = f(x,\ y)$ представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

Линией уровня $z = c$ функции двух переменных $z = f(x,\ y)$ называется линия на плоскости $f(x,\ y) = c$. В каждой точке, лежащей на этой линии, функция $z = f(x,\ y)$ принимает значение, равное c. Число c в этом случае называется ***уровнем***.

Поверхностью уровня $u = c$ *функции* $u = f(x, y, z)$ называется поверхность $f(x, y, z) = c$, в точках которой функция $u = f(x, y, z)$ сохраняет значение, равное c.

Придавая постоянной c различные числовые значения, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня.

7.2 Частные производные

Зададим аргументу x приращение Δx, аргументу y – приращение Δy, функция z получит наращенное значение $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$. Тогда величина $\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$ будет называться полным приращением функции в точке (x, y). Если задать только приращение аргумента x или только приращение аргумента y, то полученные приращения функции соответственно $\Delta_x z = f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)$ и $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,\ y)$ называются частными.

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Частная производная обозначается одним из символов $z'_x,\ z'_y$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ или $f'_{\text{X}}(x,\ y),\ f'_y(x,\ y)$.

Для функции $z = f(x,\ y)$ по определению

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x},$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} \qquad (18)$$

Частные производные высших порядков:

Частной производной второго порядка от функции $z = f(x,\ y)$, дифференцируемой в области D, называется первая производная от соответствующей частной производной.

Рассматривая частные производные от них, получим всевозможные частные производные 3-го порядка: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ и т.д.

***Существует теорема*:** Если все входящие частные производные рассматривать как функции своих независимых переменных, непрерывны, то результат частного дифференцирования не будет зависеть от порядка дифференцирования.

Пример 55.

Задана функция двух переменных $z = x^2 + \cos y$. Найти частные производные второго порядка.

<u>Решение.</u> Найдем частную производную функции z по переменной x, при этом y будет считаться постоянной величиной. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = {z_x}' = \left(x^2 + \cos y\right)_x' = \left(x^2\right)_x' + \left(\cos y\right)_x' = 2x + 0 = 2x \cdot$$

Чтобы найти частную производную второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial\, x^2}$, продифференцируем первую частную производную еще раз по переменной x, при этом y будет по-прежнему считаться постоянной величиной. Находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z_x'\right)_x' = (2x)_x' = 2.$$

Найдем частную производную функции z по переменной y, при этом x будет считаться постоянной величиной. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y' = \left(x^2 + \cos y\right)_y' = \left(x^2\right)_y' + \left(\cos y\right)_y' = 0 - \sin y = -\sin y.$$

Чтобы найти частную производную второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial\, y^2}$, продифференцируем первую частную производную еще раз по переменной y, при этом x будет по-прежнему считаться постоянной величиной. Находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(z_y'\right)_y' = \left(-\sin y\right)_y' = -\cos y.$$

Дифференциал функции нескольких переменных:

Произведение частной производной на приращение соответственной независимой переменной называется ***частным дифференциалом.***

$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} du$ -частный дифференциал по x. Аналогично находим частный дифференциал по переменной y.

Полный или просто дифференциал функции нескольких переменных равен сумме произведений частных производных этой функции на дифференциалы соответствующих независимых переменных:

$$dz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Функция $z = f(x,\ y)$ называется **дифференцируемой в точке (*x*, *y*),** если ее полное приращение может быть представлено в виде

$\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где dz – дифференциал функции,

$\alpha = \alpha(\Delta x,\ \Delta y),\ \beta = \beta(\Delta x,\ \Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

***Теорема*:** если частные производные функции $z'_y(x, y)$ существуют в окрестности точки (*x, y*) и непрерывны в самой точке (*x, y*), то функция будет дифференцируема в этой точке.

Пример 56.

Найти полный дифференциал функции $z = x^3 y^2$.

Решение. Сначала найдем частные производные z'_x и z'_y. Для заданной функции будем иметь: $z'_x = 3x^2 y^2,\ \ z'_y = 2x^3 y$.

Тогда найдем полный дифференциал функции: $dz = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy$.

7.3 Экстремум функции нескольких переменных

Точка $M(x_0, y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки *M*, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x_0, y_0) \ge f(x, y).$$

Точка $\mathrm{M}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$. называется ***точкой минимума*** функции $\mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$,., если существует окрестность точки *M*, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x_0, y_0) \le f(x, y).$$

Обращаем внимание на *локальный* характер экстремума (максимума и минимума) функции, так как речь идет о максимальном и минимальном значении лишь в достаточно малой окрестности точки $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$.

Теорема 1. Необходимое условие экстремума.

Если функция $\mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. в точке $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Градиентом функции $z = f(M)$, в точке $M(x, y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, взятыми в точке $M(x, y)$

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j; \ \left| grad\ f \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

где ***i, j, k*** – координатные орты.

Пример 57.

Дана функция $z = x^2 + y^2$.

Решение. Определим градиент в точке $M(1,1)$.

Выражение градиента этой функции в произвольной точке будет

$$grad\ z = 2xi + 2yj.$$

Следовательно, $\left(grad\ z\right)_M = 2i + 2j, \ \left|grad\ z\right|_M = 2\sqrt{3}.$

Все точки, в которых градиент функции равен нулю или не определен, называют точками, подозрительными на экстремум, или ***критическими точками функции***.

Прежде, чем это сделать, введем понятия частных производных второго порядка.

Если частные производные $z_x' = f_x'(x,y)$ и $z_y' = f_y'(x,y)$ сами являются дифференцируемыми функциями, то можно найти также и их частные производные, которые называются *частными производными второго порядка.*

Вычислив частные производные функции $z_x' = f_x'(x,y)$, то получим $z_{xx}'' = f_{xx}''(x,y)$ и $z_{yx}'' = f_{yx}''(x,y)$.

Аналогично можно определить две частные производные функции $z_y' = f_y'(x,y)$, которые обозначаются $z_{xy}'' = f_{xy}''(x,y)$ и $z_{yy}'' = f_{yy}''(x,y)$.

Можно доказать, что *если частные производные второго порядка функции* $z = f(x,y)$ *непрерывны в точке* (x_0, y_0), *то в этой точке* $f_{xy}''(x_0,y_0) = f_{yx}''(x_0,y_0)$.

Теперь мы сможем сформулировать достаточное условие экстремума.

Теорема 2. Достаточное условие экстремума функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x,y)$:

- определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой $f_x'(x_0,y_0) = 0, \ f_y'(x_0,y_0) = 0;$

$f_x'(x_0,y_0) = 0, f_y'(x_0,y_0) = 0$

• имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка $f''_{xx}(x_0, y_0) = A;\ f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = B;\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A; f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = B;\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C$$

Обозначим $\Delta = AC - B^2$. Тогда, если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точке (x_0, y_0) (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$. имеет экстремум, причем если $A < 0$– максимум, если $A > 0$ – минимум.

В случае $\Delta = AC - B^2 < 0$, то функция $z = f(x, y)$. экстремума не имеет.

Если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

План исследования функции двух переменных на экстремум.

1) найти частные производные функции z'_x и z'_y;

2) решить систему уравнений $z'_x = 0,\ z'_y = 0$ $z'_x = 0, z'_y = 0$ $z'_x = 0, z'_y = 0$ и найти критические точки функции;

3) найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов;

4) найти экстремумы функции.

<u>Пример 58</u>**.**

Найти стационарные точки функции

$$z = y^3 + 2x^2 - 12xy + 4x - 12y + 2.$$

<u>Решение:</u>

1. Найдем частные производные данной функции:

$$z'_x = 4x - 12y + 4, \quad z'_y = 3y^2 - 12x - 12 \ z'_x = 4x - 12y + 4, z'_y = 3y^2 - 12x - 12$$

2. Для отыскания координат стационарных точек получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 4x - 12y + 4 = 0 \\ 3y^2 - 12x - 12 = 0 \end{cases}$$

3. Решаем систему уравнений. Для этого выражаем $\boldsymbol{x}$ из 1-го уравнения: $x = 3y - 1$ $x = 3y\text{-}1$ и подставляем во 2-е уравнение. Получаем $y^2 - 12y = 0$. $y^2 - 12y = 0$ $y^2 - 12y = 0$. $y^2\text{-}12y = 0$

Это уравнение имеет корни $y_1 = 0$ и $y_2 = 12$. Соответствующие значения $\boldsymbol{x}$: $x_1 = -1$, $x_2 = 35$.

Стационарные точки функции $(-1, 0)$ и $(35, 12)$.

<u>Пример 59</u>.

Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

<u>Решение:</u>

1. Находим частные производные данной функции. Получаем:

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad z'_y = 6xy - 12$$

2. Для отыскания координат стационарных точек получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

3. Решаем систему уравнений. Для этого выражаем $\boldsymbol{x}$ из 2–го уравнения $x = 2/y$ и подставляем в 1–е уравнение.

Получаем:

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0; \ \left(y^2\right)^2 - 5y^2 + 4 = 0; \ \left(y^2 - 1\right)\left(y^2 - 4\right) = 0$$

Это уравнение имеет корни $y_1 = 1,\ y_2 = -1,\ y_3 = 2$ *и* $y_4 = -2$.

Соответствующие значения x: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Стационарные точки: $M_1(2, 1)$, $M_2(-2, -1)$, $M_3(1, 2)$, $M_4(-1, -2)$.

4. Проверяем выполнение достаточных условий экстремума в стационарных точках. Для этого находим частные производные 2-го порядка:

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = 6y, \ z''_{yy} = 6x.$$

- Вычисляем значения частных производных 2–го порядка в стационарной точке $M_1(2, 1)$. Получаем: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$. Отсюда $AC - B^2 = 144 - 36 > 0$ и, следовательно, в точке M_1 экстремум есть. Так как $A > 0$, то в точке $M_1(2, 1)$ функция имеет минимум.

- Вычисляем значения частных производных 2–го порядка в стационарной точке $M_2(-2, -1)$. Получаем: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$. Отсюда $AC - B^2 = 144 - 36 > 0$ и, следовательно, в точке M_2 экстремум есть. Так как $A < 0$, то в точке $M_1(-2, -1)$ функция имеет максимум.

- Вычисляем значения частных производных 2-го порядка в стационарной точке $M_3(1, 2)$. Получаем: $A = 6$, $B = 12$, $C = 6$. Отсюда $AC - B^2 = =36 - 144 < 0$ и, следовательно, в точке M_3 функция экстремума не имеет.

• Вычисляем значения частных производных 2-го порядка в стационарной точке M_4 $(-1,\ -2)$. Получаем: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$. Отсюда $AC - B^2 = 36 - 144 < 0$ и, следовательно, в точке M_4 функция экстремума не имеет.

7.4 Вопросы для самопроверки:

1. Дайте определение функции двух независимых переменных. Приведите примеры.
2. Что называется областью определения функции двух независимых переменных?
3. Что называется частным и полным приращением функции двух независимых переменных?
4. Сформулируйте определение предела функции двух переменных.
5. Какая функция называется непрерывной в точке / в области?
6. Дайте определение частных производных первого порядка функции двух переменных.
7. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных?
8. Как найти частные производные второго порядка функции двух переменных?
9. Что является необходимым условием экстремума функции двух переменных?
10. Сформулируйте достаточный признак экстремума функции двух переменных.

8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [3], [2], [5], [6], [7].

8.1 Понятие о дифференциальном уравнении

При решении различных задач математики, физики, химии и других дисциплин часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и её производные (или дифференциалы) различных порядков. Такие уравнения называются ***дифференциальными***. Мы будем рассматривать только те дифференциальные уравнения, искомая функция в которых зависит от одной переменой. Такие дифференциальные уравнения называются ***обыкновенными.***

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, содержащейся в нем.

Пример 60.

$y''' - 3y'' + 2y = 0$ – дифференциальное уравнение третьего порядка.

В общем виде *дифференциальное уравнение* $\boldsymbol{n}$*-го порядка* можно записать так:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0. \qquad (19)$$

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение $\boldsymbol{n}$-го порядка в решении содержит $\boldsymbol{n}$ произвольных постоянных. Такое решение называется *общим решением* дифференциального уравнения или *общим интегралом*

Частным решением дифференциального уравнения называется такое его решение, в котором произвольным постоянным приданы конкретные числовые значения, т.е. заданы *начальные условия*. Количество их совпадает с порядком дифференциального уравнения. Для дифференциального уравнения $\boldsymbol{n}$-го порядка должно быть задано $\boldsymbol{n}$ начальных условий:

$$y_{x=x_0} = y_0\,,\ y'_{x=x_0} = y'_0\,,\ y''_{x=x_0} = y''_0\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-1)}_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0.$$

Отыскание решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши*.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

Дифференциальное уравнение называется ***уравнением с разделяющимися переменными,*** если оно имеет вид:

$$f_1(x)\cdot\phi_2(y)\,dx+f_2(x)\cdot\phi_1(y)\,dy=0\,, \tag{20}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ – функции только переменной $\boldsymbol{x}$, а $\phi_1(y)$, $\phi_2(y)$ – функции только переменной у.

Поделив обе части уравнения (20) на произведение $\phi_2(y)\cdot f_2(x)$, после сокращения получим:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\frac{\phi_1(y)}{\phi_2(y)}dy\,.$$

Видим, что левая часть полученного равенства зависит только от $\boldsymbol{x}$, а правая – только от $\boldsymbol{y}$, т.е. переменные разделены. Левую часть равенства можно рассматривать как дифференциал некоторой функции $F(x)$ переменной $\boldsymbol{x}$, т.е. $F(x)$ – первообразная для ${f_1(x)}/{f_2(x)}$.

Следовательно,

$$F(x)=\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx\,.$$

Аналогично,

$$\Phi(x)=-\int\frac{\phi_1(y)}{\phi_2(y)}dy\,.$$

Равенство дифференциалов функций означает, что сами функции отличаются на постоянное слагаемое, т.е.

$$F(y)=\Phi(y)+C$$

или

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\int\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}dy+C \tag{21}$$

<u>Пример 61</u>.

Решить уравнение

$$y(1+x)\,dx+x(1-y)\,dy=0\,.$$

<u>Решение.</u> Преобразуем левую часть уравнения. Разделим обе части уравнения на $x\cdot y\neq 0$:

$$\frac{y\cdot(1+x)}{xy}dx+\frac{x\cdot(1-y)}{xy}dy=0,$$

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0,$$

$$\int\frac{1+x}{x}dx=-\int\frac{1-y}{y}dy,$$

$$\int\frac{1}{x}dx+\int dx=-\int\frac{1}{y}dy+\int dy,$$

$$\ln|x|+x+C=-\ln|y|+y,$$

$$\ln|x|+x+C+\ln|y|-y=0,$$

$$\ln|xy|+x-y+C=0.$$

Пример 62.

Найти решение уравнения $y'=-\frac{y}{x}$, *удовлетворяющее условию* $y(4)=1$.

Решение. Имеем:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

Разделим переменные:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C|,$$

$$y=\frac{C}{x}.$$

Получили общее решение дифференциального уравнения. Подставим оба условия $x=4$ и $y=1$ в общее решение. Получаем:

$$1=\frac{c}{4},\ c=4,$$

тогда $y=\frac{4}{x}$ – частное решение уравнения $y'=-\frac{y}{x}$.

8.2 Вопросы для самопроверки:

1. Как в общем виде можно записать дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными? Сформулируйте метод его интегрирования.
2. Дайте определение однородной функции степени **m>0** и степени **m=0**.

3. Какое уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка?
4. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка.
5. В чем заключается метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) интегрирования линейного дифференциального уравнения первого порядка?
6. Сформулируйте метод Бернулли (разделения переменных) для интегрирования линейного уравнения.

9 РЯДЫ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [1], [3], [4].

9.1 Числовые ряды

Необходимый признак сходимости ряда:

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

– ***Признак сравнения.***

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ (1) \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ (2),$$

причем члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго, т.е. $u_n \le v_n$. Тогда:

1) если сходится ряд (2) (с большими членами), то сходится и ряд (1) (с меньшими членами).
2) если расходится ряд (1) (с меньшими членами), то расходится и ряд (2) (с большими членами).

Для сравнения используют ряды-эталоны, сходимость которых известна. Это такие ряды, как:

а) *ряд геометрической прогрессии* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1$;

б) обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

– ***Признак Даламбера.***

Пусть для знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует предел отношения последующего члена ряда к предыдущему при $n \to \infty$, равный l, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда, если $l < 1$, то ряд сходится; если $l < 1$, то ряд расходится. Если $l = 1$, то вопрос о сходимости ряда не решен.

– ***Интегральный признак Коши.***

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого при натуральных значениях аргумента совпадают со значениями непрерывной положительной функции $y = f(x)$, убывающей на интервале $(1;\infty)$, т.е. $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_n = f(n), \dots$ Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Достаточный признак расходимости числового ряда.

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Знакочередующийся ряд – это ряд, любые два соседних члена которого имеют противоположные знаки.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \ (u_n > 0).$$

Достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов (признак Лейбница).

Если члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \ (u_n > 0)$$

убывают по абсолютной величине, т.е. $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$, и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена ряда ($S \le u_1$).

Знакочередующийся ряд ***сходится абсолютно***, если он сам сходится, а также сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Знакочередующийся ряд ***сходится условно***, если он сам сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, расходится.

9.2 Степенные ряды. Интервал сходимости степенного ряда.

Степенным рядом называют ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \qquad (21)$$

где a_0 , a_1 , a_2, ..., a_n,...- числа-коэффициенты ряда, x - переменная величина.

Областью сходимости такого ряда является интервал $(-R; R)$ с центром в точке $x = 0$.

R - *радиус сходимости,* который определяется по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (22)$$

Таблица разложений в степенные ряды некоторых элементарных функций.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \ , \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \ , \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \ , \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots. +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots., \qquad x \in (-1;1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \ , \qquad x \in (-1;1)$$

Пример 63. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2^n\left(n^3+4\right)}$. Написать первые три члена ряда, найти интервал сходимости и проверить сходимость ряда на концах интервала.

Решение. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2^n\left(n^3+4\right)}=\frac{3x}{2(n^3+4)}+\frac{9x^2}{4(n^3+4)}+\frac{27x^3}{8(n^3+4)}+\ldots$

Находим радиус сходимости ряда

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, где a_n и a_{n+1} - соответственно n-й и $(n+1)$-й коэффициенты ряда.

$$a_n=\frac{3^n}{2^n(n^3+4)},\quad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}((n+1)^3+4)}.$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\cdot 2^{n+1}\cdot\left((n+1)^3+4\right)}{2^n\cdot(n^3+4)\cdot 3^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\cdot 2^n\cdot 2\cdot\left((n+1)^3+4\right)}{2^n\cdot(n^3+4)\cdot 3^n\cdot 3}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2\cdot\left((n+1)^3+4\right)}{(n^3+4)\cdot 3}\right|=\frac{2}{3}.$$

Тогда интервал сходимости ряда $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$.

Проверим сходимость ряда на концах интервала сходимости.

а) Положим $x=\frac{2}{3}$, тогда ряд примет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2^n\left(n^3+4\right)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+4}$.

Это числовой знакоположительный ряд, определим его сходимость. Сначала проверим выполнимость необходимого признака сходимости. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+4}=0$. Необходимый признак выполняется, но вывод о сходимости ряда сделать нельзя. Применим достаточный признак сходимости: *признак сравнения*. Сравним исходный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Это обобщенный гармонический ряд, он сходится, т.к. $p=3>1$. Члены исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+4}$ меньше членов сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, т.е. для всех n выполняется неравенство $\frac{1}{n^3+4}<\frac{1}{n^3}$. По признаку сходимости следует, что из сходимости ряда с большими слагаемыми следует сходимость ряда с меньшими слагаемыми, а значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+4}$ сходится по первой части признака сравнения. Следовательно, правый конец $x=\frac{2}{3}$ входит в область сходимости.

б) Положим $x=-\frac{2}{3}$, тогда ряд примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{2^n\left(n^3+4\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+4}=-\frac{1}{5}+\frac{1}{12}-\frac{1}{31}+\dots.$$

Это числовой знакочередующийся ряд, определим его сходимость. Применим к нему *признак Лейбница*:

1-ое условие признака: члены ряда убывают по абсолютной величине:

$\frac{1}{5}>\frac{1}{12}>\frac{1}{31}>\dots$

2-е условие признака: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+4}=0$.

Таким образом, оба условия признака Лейбница выполняются, и значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+4}$ сходится. Следовательно, левый конец $x=-\frac{2}{3}$ входит в область сходимости.

Ответ: Ряд сходится при $x\in\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$.

9.3 Вопросы для самопроверки:

1. Сформулировать необходимый признак сходимости числового ряда.
2. Какие достаточные признаки сходимости вам известны?
3. В чем заключается признак сравнения?
4. Суть интегрального признака Коши?
5. Признак Даламбера для определения сходимости числового ряда.
2. Достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.
3. Какой вид имеет степенной ряд?
4. Что такое область сходимости степенного ряда?

10 МАТРИЦЫ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [5], [10], [11], [13], [14].

10.1 Виды матриц

Матрицей называется прямоугольная таблица из $m \times n$ чисел, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} называются ***элементами матрицы***, i означает номер строки, а индекс j – номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Числа $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{mn}$ – образуют главную диагональ матрицы. Размеры прямоугольной матрицы обозначаются $\left[m \times n\right]$. Матрицы, у которых число строк равно числу столбцов и равно n, называются ***квадратными матрицами*** порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Две матрицы A и B размера $\left[m \times n\right]$ называются ***равными***, если равны их соответствующие элементы, т.е. A=B, если $a_{ij} = в_{ij}$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой.***

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, все элементы которой, стоящие не на главной диагонали, равны нулю.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 5 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, единицы, называется ***единичной матрицей.***

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если у неё все элементы расположены по одну сторону главной диагонали = 0. ***Верхней треугольной матрицей*** называется матрица, все элементы которой ниже главной диагонали равны нулю.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Нижней треугольной матрицей называется матрица, все элементы которой выше главной диагонали равны нулю.

Транспонированная матрица A^T размера $n \times m$ для матрицы A размера $m \times n$ — это матрица, полученная из исходной матрицы заменой строк столбцами: $A_{ij}^T = A_{ji}$. То есть для получения транспонированной матрицы из исходной нужно каждую строчку исходной матрицы записать в виде столбца в том же порядке элементов.

Свойства транспонированных матриц.

- Дважды транспонированная матрица А равна исходной матрице А.
- Транспонированная сумма матриц равна сумме транспонированных матриц.
- Транспонированное произведение матриц равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке.
- При транспонировании можно выносить числовой множитель.
- Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

Пример 64. Найти матрицу A^{T} для матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Исходя из определения транспонированной матрицы, нужно каждую строчку исходной матрицы записать в виде столбца в том же порядке. Получим $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

10.2 Операции над матрицами

1) Матрицы одинаковых размеров можно складывать, используя формулу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & \cdots & в_{1n} \\ в_{21} & в_{22} & \cdots & в_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ в_{m1} & в_{m2} & \cdots & в_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+в_{11} & a_{12}+в_{12} & \cdots & a_{1n}+в_{1n} \\ a_{21}+в_{21} & a_{22}+в_{22} & \cdots & a_{2n}+в_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+в_{m1} & a_{m2}+в_{m2} & \cdots & a_{mn}+в_{mn} \end{pmatrix}.$$

2) При умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число:

$$k \cdot \mathrm{A} = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3) Перемножать возможно лишь те прямоугольные матрицы, у которых число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В, а также квадратные матрицы одинакового порядка. Для прямоугольных матриц схематически размеры сомножителей и произведения могут быть представлены так: $[m \times s] \cdot [s \times n] = [m \times n]$.

Умножение матрицы А на матрицу В определяется следующим образом: для того, чтобы получить элемент C_{ij} матрицы С = А · В, надо элементы i-ой строки матрицы А умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В и результаты сложить, т.е. $C_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{s} a_{ik} в_{kj}$.

Пример 65. Выполнить действия с матрицами:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3} \bullet \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2} - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{4\times 2} \bullet \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Решение. Порядок действий обычный: сначала умножение, затем сложение (вычитание). Перемножить можно только так называемые ***согласованные матрицы***, т.е. такие матрицы, где число столбцов первой, равно числу строк второй. В результате перемножения получаем матрицы, размера $[4\times 2]$, которые можно как складывать, так и вычитать.

$$1)\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{3\cdot(-2)-5\cdot 1+1\cdot 3}_{C_{11}} & \underbrace{3\cdot 5-5(-7)+1(-1)}_{C_{12}} \\ \underbrace{-4(-2)+3\cdot 1+2\cdot 3}_{C_{21}} & \underbrace{-4\cdot 5+3(-7)+2\cdot(-1)}_{C_{22}} \\ \underbrace{1\cdot(-2)+4\cdot 1+3\cdot 3}_{C_{31}} & \underbrace{1\cdot 5+4\cdot(-7)+3\cdot(-1)}_{C_{32}} \\ \underbrace{0\cdot(-2)-1\cdot 1+1\cdot 3}_{C_{41}} & \underbrace{0\cdot 5-1(-7)+1(-1)}_{C_{42}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 49 \\ 17 & -43 \\ 11 & -26 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Умножение произведем аналогично.

$$2)\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & -5 \\ -4 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычтем полученные результаты.

$$3)\begin{pmatrix} -8 & 49 \\ 17 & -43 \\ 11 & -26 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & -5 \\ -4 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 41 \\ 13 & -38 \\ 15 & -29 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие ее преобразования:

- Перестановка двух столбцов (строк) матрицы.
- Умножение всех элементов одного столбца (строки) матрицы на одно и то же число, отличное от нуля.
- Прибавление к элементам одного столбца (строки) соответствующих элементов другого столбца (строки), умноженных на одно и то же число.

Матрица В, полученная из исходной матрицы А путем конечного числа элементарных преобразований, называется ***эквивалентной*** (А ~ В).

10.3 Вопросы для самопроверки

1. Понятие матрицы.
2. Как определяется размер матрицы?
3. Какие матрицы являются равными?
4. Какие виды матриц вам известны?
5. Как матрицу умножить на число?
6. Какие матрицы можно перемножить?
7. Как складываются две матрицы?
8. Понятие транспонированной матрицы.
9. Какие вам известны свойства операций над матрицами?
10. Какие матрицы называются эквивалентными?
11. Какие действия относятся к элементарным преобразованиям над матрицами?

11 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [4], [6], [7], [10], [11].

11.1 Понятие определителя

Пусть имеется A – квадратная матрица порядка n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определитель (***детерминант***) квадратной матрицы A – это число, которое ставится в соответствие матрице и вычисляется по ее элементам согласно правилам. Определитель матрицы обозначают $\det A$ *или* ΔA, заключая матрицу в «прямые» скобки:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Так же как и у матриц, элементы $a_{11}a_{22}a_{33}....a_{nn}$ образуют главную диагональ определителя, а элементы $a_{1n}a_{2n-1}...a_{n1}$ побочную.

Минором $\boldsymbol{M_{ij}}$ элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ называют определитель $(\boldsymbol{n}-1)$ порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием $\boldsymbol{i}$-ой строки и $\boldsymbol{j}$-го столбца, т.е. тех строки и столбца, на пересечении которых находится данный элемент $\boldsymbol{a_{ij}}$. ***Алгебраичеким дополнением*** $\boldsymbol{A_{ij}}$ элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$, *называется минор* $\boldsymbol{M_{ij}}$, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{M_{ij}}$. Квадратную матрицу, определитель которой равен нулю, называют ***вырожденной***, в противном случае – ***невырожденной***.

11.2 Свойства определителей

1. Для любой квадратной матрицы det A = det(A^T), т.е. при транспонировании величина определителя не изменяется.

2. Если в определителе один из столбцов нулевой, то определитель равен нулю.

3. При перестановке двух столбцов определитель меняет знак на противоположный.

4. Если в определителе имеются два одинаковых столбца, то он равен нулю.

5. Если определитель имеет два пропорциональных столбца, то он равен нулю.

6. При умножении всех элементов одного столбца определителя на число определитель умножается на это число.

7. Если j-ый столбец определителя представляется в виде суммы двух столбцов $a_j + b_j$, то определитель равен сумме двух определителей, у которых j-ми столбцами являются a_j и b_j соответственно, а остальные столбцы одинаковы.

8. Определитель линеен по любому столбцу.

9. Определитель не изменится, если к элементам одного столбца прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на одно и то же число.

10. Сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца равна нулю.

11.3 Методы вычисления определителей

- Определителем матрицы $A = (a_{11})$ порядка $n = 1$ называется единственный элемент этой матрицы: $\det A = |a_{11}| = a_{11}$.

- Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ порядка $n = 2$ называется

число,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12.}. \tag{23}$$

При вычеркивании первой строки и одного столбца получаем матрицу, содержащую один элемент, поэтому

$$M_{11} = \det(a_{22}) = a_{22}\,, \qquad M_{12} = \det(a_{21}) = a_{21}\,.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}\,. \tag{24}$$

Определитель второго порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали.

Пример 66. Вычислить: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся формулой (24) для вычисления определителя второго порядка. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 0 = 4.$

•Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ порядка $n = 3$ называется число

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13}. \qquad (25)$$

При вычеркивании первой строки и одного столбца получаем определители квадратных матриц второго порядка:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

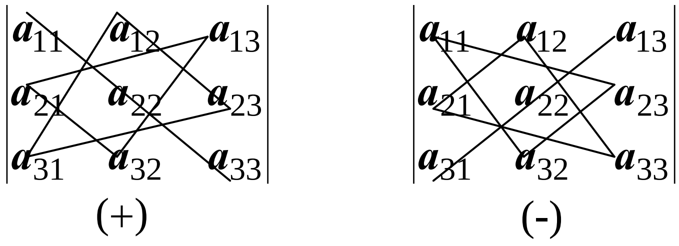
Это определители второго порядка, подставив их значения в формулу (3), получим:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \qquad (26)$$

Определитель представляет собой сумму шести слагаемых, каждое из которых есть произведение трех его элементов, стоящих в разных строках и разных столбцах. Причем три слагаемых берутся со знаком плюс, а три других – со знаком минус.

Это есть так называемое ***правило треугольников*** (рис. 41): надо сложить три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников, имеющих сторону, параллельную главной диагонали и вычесть три произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах двух треугольников, имеющих сторону, параллельную побочной диагонали.



Р и с . 41. Правило треугольников

Произведение соединенных элементов в левой таблице берется со знаком (+), а в правой – со знаком (-).

Пример 67. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

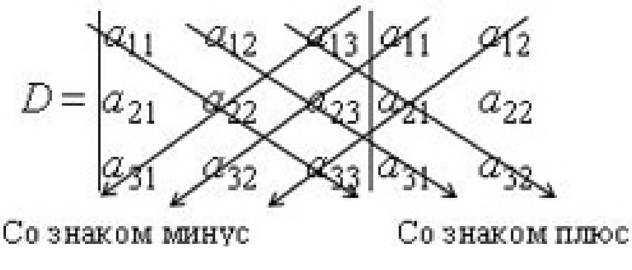
Решение.

Воспользуемся правилом треугольников (формула 41):

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6\cdot3\cdot0 + 6\cdot1\cdot1 + 2\cdot4\cdot4 - 4\cdot3\cdot1 - 1\cdot4\cdot6 - 6\cdot2\cdot0 =$$

$$= 6 + 32 - 12 - 24 = 2$$

Определитель третьего порядка можно также вычислить, воспользовавшись ***правилом Саррюса***. К исходной матрице приписываются справа первый и второй столбцы, далее вычисляются произведения элементов, стоящих на каждой из указанных шести прямых (рис. 42), а затем находится алгебраическая сумма этих произведений, при этом произведения элементов на прямых, параллельных главной диагонали, берутся со знаком плюс, а произведения элементов на прямых, параллельных побочной диагонали, – со знаком минус.



Р и с . 42. Правило Саррюса

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (27)$$

• Все определители $\boldsymbol{n}$*-го порядка* вычисляются по ***формуле разложения определителя по элементам строки (столбца).*** *Определитель матрицы А равен сумме произведений элементов произвольной строки* (*столбца*) *на их алгебраические дополнения*:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}\ . \tag{28}$$

$\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ – разложение по $i-$ ой строке,

$\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ – разложение по $j-$му столбцу.

Например, разложим определитель третьего порядка по элементам 1-ой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1-1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1-2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1-3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) - a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

<u>Пример 68</u>. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

<u>Решение.</u> Вычислим определитель разложением по элементам 1-го столбца с помощью формулы (6):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right) + 1\left(\left(-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right)\right) = 2(-2+6) + 1(1-3) =$$

$$= 6.$$

11.4 Вопросы для самопроверки

1) Понятие определителя.
2) Что называется минором элемента a_{ij} ?
3) Как вычисляется алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} ?
4) Какая матрица является вырожденной?
5) Правило треугольников для вычисления определителя третьего порядка.
6) В чем заключается метод разложения определителя n-го порядка по элементам строки либо столбца?
7) Правило Саррюса для вычисления определителя третьего порядка.
8) Основные свойства определителей.

12 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [1], [4], [6], [10], [11], [14].

Системой m ***линейных алгебраических уравнений*** (СЛАУ) с n неизвестными называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm} = b_m , \end{cases} \qquad (27)$$

Числа $a_{11}, a_{21}, a_{3n}, a_{mn}$ называются коэффициентами системы, $b_1, b_2 \ldots b_m$ – свободными членами, $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots\ \boldsymbol{x_n}$ – неизвестными.

Решением СЛАУ называется упорядоченная совокупность n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n)$ такая, что после замены неизвестных x_1, x_2, …, x_n соответственно числами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство.

12.1 Матричная и векторная записи систем линейных уравнений

Система (27) может быть записана в матричной форме:

$$A \cdot X = B , \qquad (28)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – основная матрица системы (27),

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} в_{10} \\ в_{20} \\ \cdots \\ в_{m0} \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец свободных членов уравнений.

Система (7) может быть записана так же и в векторной форме: $\sum_{k=1}^{n} \overline{a}_k \cdot x_k = \overline{в}_0$, *где* $\overline{a}_k$ *и* $\overline{в}_0$ $m-$ мерные векторы, имеющие координаты $\overline{a}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk})$ *и* $\overline{в}_0 = (в_{10}, в_{20}, \ldots, в_{m0})$.

Пример 69. Записать в матричной и векторной формах следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение: В матричной форме система может быть записана по формуле (8):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В векторной форме система запишется в виде:

$$\overline{a}_1 x_1 + \overline{a}_2 x_2 + \overline{a}_3 x_3 + \overline{a}_4 x_4 = \overline{в}_0,$$

где $\overline{a}_1 = (2, 3, 1)$; $\overline{a}_2 = (0, 0, 1)$; $\overline{a}_3 = (3, -2, 4)$; $\overline{a}_4 = (1, 1, 0)$;
$\overline{в}_0 = (6, 4, 2)$.

12.2 Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \qquad (29)$$

Можно показать, что если обратная матрица существует, то она определяется для данной матрицы однозначно.

Для того, чтобы квадратная матрица имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. чтобы её определитель был отличен от нуля.

Пусть A – невырожденная матрица порядка n и $\det A$ её определитель. Обозначим A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} и расположим алгебраические дополнения всех элементов в виде матрицы C которая называется ***присоединенной*** или ***союзной*** для матрицы А.

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C. \qquad (30)$$

Пример 69. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем сначала определитель матрицы A, раскрывая его разложением по элементам 1-ой строки:

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \det A \neq 0,$$

следовательно, матрица A невырожденная и обратная к ней существует.

Находим алгебраические дополнения A_{ij}.

$A_{11}=1;\quad A_{12}=-1;\quad A_{13}=0;\quad A_{21}=-12;\quad A_{22}=17;\quad A_{23}=-2;$

$A_{31}=5;\quad A_{32}=-7;\quad A_{33}=1.$

Составим присоединенную матрицу

$C=\begin{pmatrix}1 & -12 & 5\\ -1 & 17 & -7\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, так как $\det A=1,$ то $A^{-1}=C$.

По формуле (10) получим $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -12 & 5\\ -1 & 17 & -7\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Выполним проверку правильности вычислений по формуле (29).

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -12 & 5\\ -1 & 17 & -7\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

12.3 Решение систем с помощью обратной матрицы

С помощью обратной матрицы удобно решать так называемые определенные системы **n** линейных уравнений с **n** неизвестными.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=в_{10}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=в_{20}\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=в_{n0}\end{cases}$$

Определитель основной матрицы этой системы $\det A\neq 0$

В матричной записи системы (формула 28), умножим обе части матричного уравнения $A\cdot X=B$ слева на A^{-1}, получим $\underbrace{\left(A^{-1}\cdot A\right)}_{E}\cdot X=A^{-1}\cdot B$

или $X=A^{-1}\cdot B$,

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец решений данной системы,

$B = \begin{pmatrix} в_{10} \\ в_{20} \\ \cdots \\ в_{n0} \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>Пример 70.</u> Решить систему с использованием обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ -3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

<u>Решение</u>: Запишем систему в матричной форме $A \cdot X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы А:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 18 + 24 + 10 - 24 - 9 - 20 = -1 \neq 0, \text{значит существует } A^{-1}.$$

Находим союзную матрицу $C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 5 & -6\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{vmatrix}=0$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{vmatrix}=1 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 5 & -6\end{vmatrix}=-7$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & -6\end{vmatrix}=-3 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\end{vmatrix}=1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=-5 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=1$$

$$C=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -7 & -5\\ 0 & -3 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Тогда $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot C=-1\cdot\begin{pmatrix}-2 & -7 & -5\\ 0 & -3 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7 & 5\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$

Проверим, верно ли найдена A^{-1}, воспользовавшись формулой (29):

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ -3 & 5 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 7 & 5\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Зная обратную матрицу, получим решение системы:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7 & 5\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 3\\ -4\end{pmatrix},$$

$x_1=12,\ x_2=3,\ x_3=-4.$

Выполним проверку решения системы:

$$\begin{cases} 12-2\cdot 3-4=2 \Rightarrow 2=2 \\ 2\cdot 12-3\cdot 3+4\cdot(-4)=-1 \Rightarrow -1=-1 \\ -3\cdot 12+5\cdot 3-6\cdot(-4)=3 \Rightarrow 3=3 \end{cases}$$

12.4 Ранг матрицы

Пусть имеется прямоугольная матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Выделим в этой матрице ***к*** произвольных строк и ***к*** произвольных столбцов, причем $к \le \min(m,n)$**,** и из элементов, стоящих на их пересечении, составим определитель, который будет являться минором ***к***-того порядка матрицы А. Тогда, ***рангом матрицы*** А называют такое число ***r***, что у матрицы существует хотя бы один, отличный от нуля, минор ***r***–го порядка и равны нулю все миноры (r+1) и выше порядков.

Вычисление ранга матрицы ***методом окаймляющих миноров*** основано на применении теоремы: если матрица А имеет отличный от нуля минор M порядка r и все миноры (r+1)–го порядка матрицы А, содержащие (окаймляющие) минор М, равны нулю, тогда ранг матрицы А равен r.

<u>Пример 71.</u> Вычислить ранг матрицы методом окаймляющих миноров $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

<u>Решение.</u>

Выбираем минор 1-го порядка, отличный от нуля: $M_1=|1|$. Минор второго порядка, окаймляющий его $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \ne 0$. Все миноры 3-го порядка, содержащие данный $M_2 \ne 0$ равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, ранг матрицы А равен наивысшему порядку минора, отличного от нуля. r(A)=2.

При определение ранга матрицы ***методом элементарных преобразований*** используют следующее утверждение: ранг матрицы равен количеству не нулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду. Элементарные преобразования над строками (столбцами) матрицы не меняют её ранга. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.

Пример 72. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение. Метод элементарных преобразований приводит данную матрицу к ступенчатому виду.

1) Меняем местами первую и третью строки:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

2) Умножаем первую строку на 3 и прибавляем ко второй.

3) Умножаем первую строку на 2 и прибавляем к третьей.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

4) Из третьей строки вычитаем вторую.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

5) Отбрасываем нулевую строку.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Получаем базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$.

Следовательно, ранг матрицы $R(A) = 2$.

12.5 Метод Крамера

Метод Крамера предназначен для решения тех СЛАУ, у которых определитель матрицы системы отличен от нуля. Составляем определитель основной матрицы системы (его называют также определителем системы), убеждаемся, что он не равен нулю, т.е. $\Delta \neq 0$. Для каждой переменной $x_i(i=1,\ldots n)$ необходимо составить определитель Δi, полученный из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов заданной СЛАУ.

Теорема Крамера*:* если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка. Находим значения неизвестных по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta i}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta i}{\Delta},\ldots,\ x_i=\frac{\Delta i}{\Delta}\ (i=1,\ldots,n). \qquad (31)$$

<u>Пример 73.</u> Решить систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+x_4=-8 \\ 3x_1-x_2+2x_3+6x_4=-8 \\ -x_1+3x_2+x_3-2x_4=-1 \\ x_1+2x_2 \qquad -x_4=-5 \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

Вычислим определитель системы Δ, предварительно с помощью элементарных преобразований, получив нули в первой строке, и раскладываем по элементам этой строки.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^4 1\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=1+15-24-4-6+15=-3\neq 0$$

$\Delta \neq 0$, тогда вычисляем аналогично $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 1 & 1 \\ -8 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot 1 \begin{vmatrix} 8 & -5 & 4 \\ 7 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -8 - 75 + 56 + 20 + 48 - 35 = 6 \ ,$$

тогда: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{6}{-3} = -2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 & 1 \\ 3 & -8 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -6 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 9 \\ -6 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-12 + 21 - 54 + 36 - 18 + 21) = 6 ,$$

тогда $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{6}{-3} = -2 .$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -8 & 1 \\ 3 & -1 & -8 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & -13 & 40 & 6 \\ 3 & 7 & -17 & -2 \\ 3 & 4 & -13 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -13 & 40 \\ 3 & 7 & -17 \\ 3 & 4 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-840 + 819 + 480 + 663 - 612 - 507) = -3,$$

тогда: $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-3}{-3} = 1.$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -8 \\ 3 & -1 & 2 & -8 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 2 & 8 \\ -3 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 & 8 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 - 35 - 48 - 8 + 14 + 75 = 3,$$

тогда $x_4 = \dfrac{\Delta_4}{\Delta} = \dfrac{3}{-3} -1.$

Выполним проверку: подставим найденные решения в уравнения системы:

$$\begin{cases} 2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+1-1=-8 & \Rightarrow -8=-8 \\ 3\cdot(-2)-(-2)+2\cdot 1+6\cdot(-1)=-8 & \Rightarrow -8=-8 \\ -(-2)+3\cdot(-2)+1-2\cdot(-1)=-1 & \Rightarrow -1=-1 \\ -2+2\cdot\left(-2\right)-(-1)=-5 & \Rightarrow -5=-5 \end{cases}$$

Ответ: $x_1=-2, \quad x_2=-2, \quad x_3=1, \quad x_4=-1.$

12.6 Исследование систем линейных уравнений

Система называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет ни одного решения, то она называется ***несовместной***. Совместная система называется ***определенной***, если ее решение единственное, в противном случае, если решений больше чем одно, система называется ***неопределенной***.

Система называется ***однородной***, если все свободные члены равны нулю:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Две системы линейных уравнений называются ***эквивалентными*** или ***равносильными***, если множества их решений совпадают.

Помним, что матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ является ***основной матрицей*** системы. Если справа к ней добавить столбец свободных членов, получим ***расширенную матрицу*** системы (27)

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & в_{10} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & в_{20} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & в_{m0} \end{pmatrix}.$$

Необходимое и достаточное условия совместности системы (27) определяет ***теорема Кронекера - Капелли:***

- Необходимым и достаточным условием совместности системы является равенство рангов основной и расширенной матрицы этой системы. Таким образом, система (27) совместна, если

$$r(A) = r(A^*) = r. \tag{32}$$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна.

- Если $r = n$, то система (7) будет определённая.
- Если $r < n$, то система будет неопределенная.

Если система неопределённая, то выделяем базисные и свободные неизвестные.

Базисными неизвестными называем те неизвестные, коэффициенты при которых образуют базисный минор.

Базисным минором называется всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы. Остальные неизвестные (n–r) называются ***свободными.*** Существует теорема: любая совокупность значений свободных неизвестных определяет однозначно решение системы (27).

Для нахождения решения достаточно перенести свободные неизвестные в правую часть и решать полученную систему относительно базисных неизвестных.

Пример 74. Исследовать на совместность систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} x_1-2x_2+x_3=3 \\ x_1+3x_2-x_3=1 \\ 3x_1+4x_2-x_3=5 \end{array}\right\}.$$

Решение.

Находим ранг основной $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$ и расширенной $A^*=\begin{pmatrix}1-2\ 1\ 3\\ 1\ 3-1\ 1\\ 3\ 4-1\ 5\end{pmatrix}$ матриц, используя метод элементарных преобразований или окаймляющих миноров. Получаем, $r(A)=2$ и $r(A^*)=2.$ Таким образом, по теореме Кронекера - Капелли система совместна (формула 32), но неопределенна, т. к. $r=2$, а число неизвестных 3.

12.7 Метод Гаусса

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения неизвестных, из уравнений системы (кроме 1-го уравнения), начиная с $\boldsymbol{x}_1$. Метод, не требуя предварительного исследования системы, с помощью элементарных преобразований дает возможность привести систему либо к треугольному (в этом случае система имеет единственное решение), либо к трапециевидному виду (в этом случае система имеет множество решений). Если в результате преобразований получается уравнение вида $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=0,$ то его отбрасывают из системы и продолжают дальнейшие преобразования. Если же получается уравнение вида: $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=в, где\ в\neq 0,$ то делается вывод, что система несовместна. В практике элементарные преобразования чаще выполняются не над уравнениями системы, а над ее расширенной матрицей, которая в результате элементарных преобразований приводится к ступенчатому виду. По полученной матрице восстанавливается преобразованная система и решается, начиная с последнего уравнения (обратный ход метода Гаусса).

Если получилась треугольная система, то она имеет единственное решение, если трапециевидная, то система имеет множество решений.

Для нахождения общего решения системы выражаем основные (базисные) неизвестные, стоящие по диагонали, через оставшиеся (свободные). Придавая свободным неизвестным значение равное 0, получим базисное решение.

Пример 75. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Найти общее, частное и базисное решения системы.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

Решение. Составляем основную матрицу системы и приводим ее к трапециевидному виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

1. Меняем местами первую и вторую строки.
2. Умножаем первую строку соответственно на (-2) и (-3) и прибавляем ко 2-й и 3-й.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

3. Умножаем вторую строку на (-5) и прибавляем к третьей.

Восстанавливаем систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_6 = 2 \\ -x_2 \qquad 7x_4 + 3x_5 = 1 \\ -5x_3 + 15x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$$

Основные (базисные) неизвестные x_1, x_2, x_3 – свободные неизвестные: x_4, x_5

Выражаем из последнего уравнения x_3 и подставляем во второе и первое.

$$\begin{cases} x_3 = \frac{2}{5} + 3x_4 + \frac{2}{5}x_5 \\ x_2 = 7x_4 + 3x_5 - 1 \\ x_1 = 4x_4 + 1{,}2x_5 + \frac{1}{5} \end{cases}$$

Подставляя $x_4 = x_5 = 0$, получаем базисное решение: $\begin{cases} x_1 = 0{,}2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = \frac{2}{5} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$.

Подставляя вместо x_4, x_5 произвольные числа, например $x_4 = 1$ $и$ $x_5 = 5$, получим частное решение $\begin{cases} x_1 = 10{,}2 \\ x_2 = 21 \\ x_3 = 5{,}4 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 5 \end{cases}$.

12.8 Вопросы для самопроверки

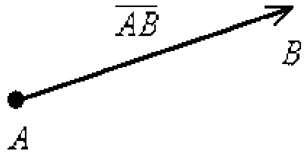
1) Обратная матрица, условия ее существования.
2) Нахождение обратной матрицы.
3) Понятие ранга матрицы.
4) Метод окаймляющих миноров для нахождения ранга матрицы.
5) Метод вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
6) Понятие системы линейных уравнений.
7) Какой минор называется базисным?
8) Матричная и векторная записи СЛАУ.
9) Какая система линейных уравнений является однородной?
10) Принцип решения системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
11) Совместность системы по теореме Кроннекера - Капелли.
12) Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
13) Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.
14) Какие неизвестные являются базисными, и какие свободными?

13 ВЕКТОРЫ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [1], [4], [10], [11].

13.1 Понятие вектора

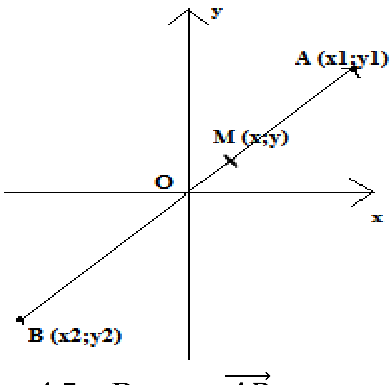
Векторы занимают особое место среди объектов, рассматриваемых в высшей математике, поскольку каждый вектор имеет не только числовое значение – длину, но и физическое и геометрическое – направленность. Вектор, представленный направленным отрезком прямой, идущим от точки A к точке B, обозначается так: $\overrightarrow{AB}$ (см. рис. 44).



Р и с . 4 4 . Вектор $\overrightarrow{AB}$

Величина, полностью характеризуемая своим числовым значением, называется ***скаляром***. Величина, которая кроме числового значения характеризуется и направлением, называется ***вектором***. Скалярные величины – m, t, V. Векторные величины – $\vec{v}, \vec{F}, \vec{a}$.

Прямоугольная система координат Oxy на плоскости задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Обозначим на плоскости вектор $\overrightarrow{AB}$ с серединой в точке M.



Р и с . 4 5 . Вектор $\overrightarrow{AB}$ на плоскости

Известно, что каждой точке на плоскости будет соответствовать пара чисел. Соответственно любой паре чисел будет соответствовать определенная точка.

Расстояние d между точками плоскости $A(x_1, y_1)$ и $B\ (x_2, y_2)$ можно рассматривать как ***длину*** или ***модуль*** вектора $\overrightarrow{AB}$. Координаты любого вектора на плоскости, зная координаты его начала и конца, находятся по формуле:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}. \tag{33}$$

Тогда, модуль вектора вычислим по формуле (34).

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{34}$$

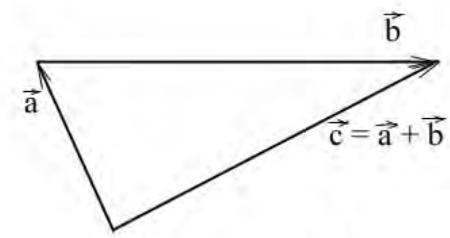
Два вектора считаются ***равными***, если они расположены на параллельных или совпадающих прямых, и имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Пример 76. Найти расстояние между двумя точками B (2;5), C (3;2).

Решение. Так как расстояние между двумя точками на плоскости это длина вектора, найдем длину вектора $\overrightarrow{BC}$, воспользовавшись формулой (14).

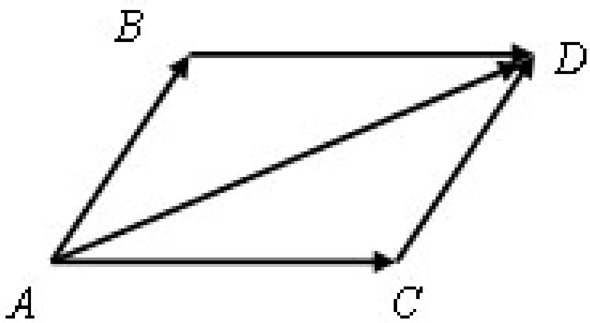
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(3-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

Под ***суммой векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$, понимается вектор $\vec{c}$ равный по величине и направлению замыкающей ломаной построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ (см. рис. 5).



Р и с . 4 6 . Сумма векторов

В случае двух векторов воспользуемся правилом параллелограмма (см. рис. 47), векторы должны исходить из одной точки, а вектор суммы будет диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах.



Р и с . 4 7 . Правило параллелограмма

Свойства сложения:

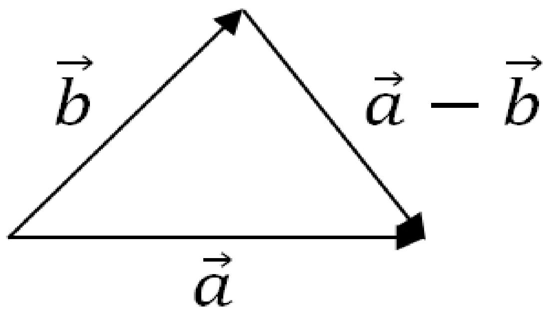
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) Для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположенный ему вектор $-\overrightarrow{(a)}$, такой что, $\vec{a} + \overrightarrow{(-a)} = 0$

4) Для любого вектора $\vec{a}$ существует нулевой вектор 0 такой что, $\vec{a} + 0 = \vec{a}$

Под ***разностью двух векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается такой вектор $\vec{d}$, что $\vec{b} + \vec{d} = \vec{a}$. В параллелограмме вектор разности является второй диагональю, и вектор разности $\vec{a} - \vec{b}$ направлен в сторону уменьшаемого (см.рис.48)**.**



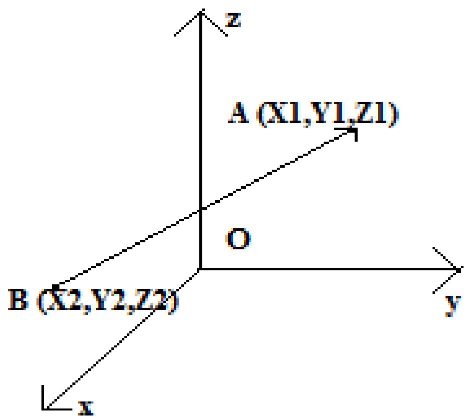
Р и с . 4 8 . Разность векторов

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k есть вектор $\vec{b}$ такой что:

1) его направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ если k>0,
2) противоположно при k<0,
3) произвольно при k=0.

Чтобы найти ***орт*** $\bar{e}$ вектора $\vec{a}$, нужно ненулевой вектор $\vec{a}$ поделить на его длину: $\vec{e} = \frac{a}{|\vec{a}|}$.

Возьмем три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy, Oz.



Р и с . 4 9 . Вектор $\overrightarrow{AB}$ в пространстве

Каждой точке в пространстве будет соответствовать три числа, и какие бы три числа мы не взяли, им будет соответствовать определенная точка в заданном пространстве.

Для того чтобы найти координаты и длину вектора в пространстве $\overrightarrow{AB}$ воспользуемся соответственно формулами:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \qquad (35)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (36)$$

Пример 77. Даны точки A(1;2;3), B(0;-3;1). Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ по формуле (35): $\overrightarrow{AB} = \{0 - 1, -3 - 2, 1 - 3\}$.

Применим формулу (36), для нахождения длины вектора:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(0-1)^2 + (-3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1 + 25 + 4} = \sqrt{30}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{30}.$$

13.2 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов ***называется число (скаляр), равное произведению длин (модулей) этих векторов на косинус угла φ между ними:***

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi \,. \qquad (37)$$

Скалярное произведение вектора на себя $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ называется ***скалярным квадратом***.

Если два вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ на плоскости определены своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$, то скалярное произведение будет равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \ x_2 + y_1 y_2 \,. \qquad (38)$$

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ выражается формулой:

$$cos\varphi = \frac{x_1 \ x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \qquad (39)$$

Аналогично находим скалярное произведение и угол между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, в пространстве:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \ x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \,. \qquad (40)$$

$$cos\varphi = \frac{x_1 \ x_2 + y_1 y_2 + z_1 \ z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (41)$$

Два вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называют ***ортогональными*** и угол между этими векторами – прямой *(*90 градусов или $\pi/2$*),* если скалярное произведение этих векторов равно нулю: $x_1 \ x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

Так как векторы орты попарно перпендикулярны, то их произведения будут равны нулю, а скалярные квадраты ортов будут единицы:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1, \quad \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{i} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{j} = 0 \qquad (42)$$

<u>Пример 78.</u> Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \angle\varphi = 60°$.

Решение. Используем формулу (37). Подставляя исходные данные, получим: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = 3 \cdot 4 \cdot \cos 60° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

Пример 79. Даны точки A (1;1;1), B (2;2;1), C (2;1;2). Найти угол $\varphi = \angle BAC$.

Решение. Найдем угол φ как угол между двумя векторами. Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ найдем, используя формулу (35). $\overrightarrow{AB} = \{1,1,0\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{1,0,1\}$. По формуле (21) получаем:

$$cos\varphi = \frac{1\cdot1 + 1\cdot0 + 0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол $\varphi = 60°$.

13.3 Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в трёхмерном пространстве называется ***правой***, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки (см. рис. 50). И наоборот, если кратчайший поворот виден по часовой стрелке, то тройка называется ***левой.*** Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

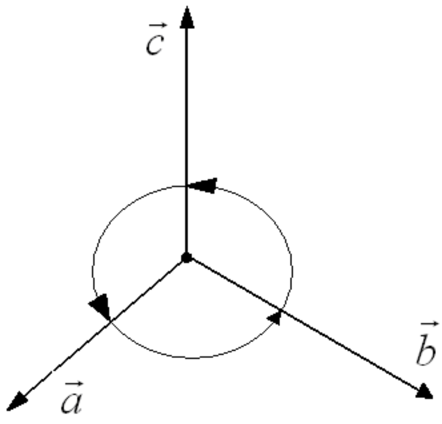


Рис. 50. Правая тройка векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (см. рис. 10), удовлетворяющий следующим условиям:

- Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

- Вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая.
- Длина вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ численно равна площади параллелограмма или половине площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$|\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi, \tag{43}$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \tag{44}$$

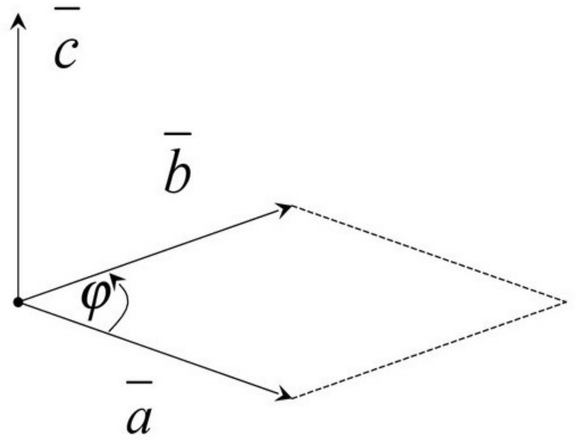


Рис. 51. Векторное произведение векторов

$$i \times j = k, j \times i = -k, k \times i = j, i \times k = -j, j \times k = i, k \times j = -i,$$
$$i \times i = j \times j = k \times k = 0. \tag{45}$$

Векторное произведение векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, заданных в координатной форме, выражается формулой (46). В верхнюю строку определителя записываем координатные векторы, во вторую и третью строки записываем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причём в строгом порядке – сначала координаты вектора $\vec{a}$, затем координаты вектора $\vec{b}$. Если векторы нужно умножить в другом порядке, то и строки следует поменять местами.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{46}$$

Вычислим определитель третьего порядка методом разложения по элементам строки по формуле (46):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}. \quad (47)$$

Пример 80. Найти длину векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \angle\varphi = 30°$.

Решение. По формуле (23) имеем: $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi = 2 \cdot 3 \cdot \sin 30° = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Пример 81. Раскрыть скобки и упростить выражение:
$2i \cdot (j \times k) + 3j \cdot (i \times k) + 4k \cdot (i \times j)$.

Решение. Первым действием найдём векторные произведения, находящиеся в скобках, используя формулы (45):
$j \times k = i,\ i \times k = -j,\ i \times j = k$.

Подставив в исходный пример, получим: $2i \cdot i + 3j \cdot (-j) + 4k \cdot k$. Затем вычислим скалярные произведения, применив формулу (42): $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$.

В результате получим $2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 3$.

Пример 82. Задан треугольник ABC, координаты вершин которого: $A(2;1;0)$, $B(3;-1;2)$, $C(13;3;10)$. Найти площадь треугольника.

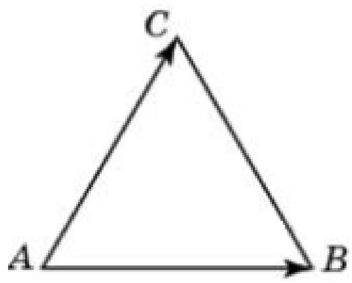


Рис. 52

Решение.

Для нахождения площади треугольника ABC воспользуемся формулой (24):

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|,$$

координаты векторов найдем по формуле (35):

$$\overline{AB}=\{x_B-x_A; y_B-y_A; z_B-z_A\},\ \overline{AC}=\{x_C-x_A; y_C-y_A; z_C-z_A\}.$$

Далее, используя формулу (47)

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\left\{\begin{vmatrix} y_B-y_A & z_B-z_A \\ y_C-y_A & z_C-z_A\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_B-x_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & z_C-z_A\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A\end{vmatrix}\right\},$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\left\{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 10\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 10\end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 11 & 2\end{vmatrix}\right\}=\{-24;12;24\},$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-24)^2+12^2+24^2}=\sqrt{1296}=36.$$

Тогда, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 36=18\ \textit{кв.ед.}$

13.4 Смешанное произведение векторов

Смешанным произведение некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}\times\vec{c}$ или иногда его называют еще тройным скалярным произведением, т.к. в результате получается скаляр. Обозначение векторного произведения:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}). \quad (48)$$

Геометрический смысл смешанного произведения в том, что его модуль равен объёму параллелепипеда (см. рис. 12), построенного на данных векторах и взятый со знаком «+», если базис $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})$ правый, и знаком «–», если базис $(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})$ левый:

$$V=|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|. \quad (49)$$

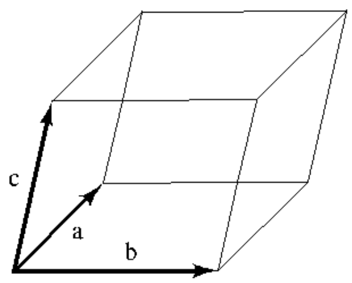


Рис. 53. Три вектора, определяющие параллелепипед

Смешанное произведение векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ $и$ $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, заданных в ортонормированном базисе (i, j, k) правой ориентации, выражается формулой:

$$\overrightarrow{d} = (\overrightarrow{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (50)$$

<u>Пример 83.</u> Вычислить смешанное произведение векторов $\overrightarrow{a} = \{1, -2, 2\}$, $\vec{b} = \{11, 2, 10\}$, $\overrightarrow{c} = \{-2, 0, 4\}$.

<u>Решение.</u> Воспользуемся формулой (50):

$$(\overrightarrow{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 + (-2) \times$$
$$\times 10 \cdot (-2) + 11 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot (-2) - 11 \cdot (-2) \cdot 4 - 0 \cdot 10 \cdot 1 = 8 + 40 +$$
$$+0 + 8 + 88 - 0 = 144.$$

<u>Пример 84</u>. Вычислить объём треугольной пирамиды, если даны её вершины $A(-2, -2, 0), B(0, 4, -1), C(1, 2, 1), D(-13, 8, 11)$.

<u>Решение</u>:

Объём пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах как на сторонах.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \right|,$$

где $\overline{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$, $\overline{AC} = \{x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A\}$, $\overline{AD} = \{x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A\}$.

Подставим координаты векторов в формулу:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -11 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 11 + 6 \cdot 1 \cdot (-11) + 3 \cdot 10 \times$$
$$\times (-1) - (-1) \cdot 4 \cdot (-11) - 3 \cdot 6 \cdot 11 - 10 \cdot 1 \cdot 2 = -270.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6} |-270| = 45 \text{ куб. ед.}$$

13.5 Вопросы для самопроверки

1. Что называется вектором?
2. Свойства суммы векторов.
3. Свойства произведения вектора на число.
4. Как найти длину (модуль) вектора?
5. Какие два вектора являются равными?
6. Понятие скалярного произведения векторов.
7. Свойства скалярного произведения векторов.
8. Понятие векторного произведения векторов?
9. Геометрический смысл векторного произведения.
10. Понятие смешанного произведения векторов.

14 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [1], [3], [11], [12], [13].

14.1 Уравнения прямой на плоскости

Простейшей линией на плоскости является прямая. Она может быть задана ***общим уравнением***:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (51)$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно. В зависимости от каких-либо заданных начальных условий, уравнение прямой может быть представлено в различном виде.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b, \qquad (52)$$

где k =tgα −угловой коэффициент.

Если прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению (52): $y_1 = kx_1 + b$.

Вычитая из уравнения (52) последнее получившееся, получим ***уравнение прямой, проходящей через заданную точку***:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (53)$$

Также формулу (53) называют ***уравнением пучка прямых***, так как таких прямых бесчисленное множество.

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Подставим в уравнение (36) координаты точки M_2:

$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ и выразим отсюда

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, тогда, $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (54)$$

Получили ***уравнение прямой через две заданные точки***.

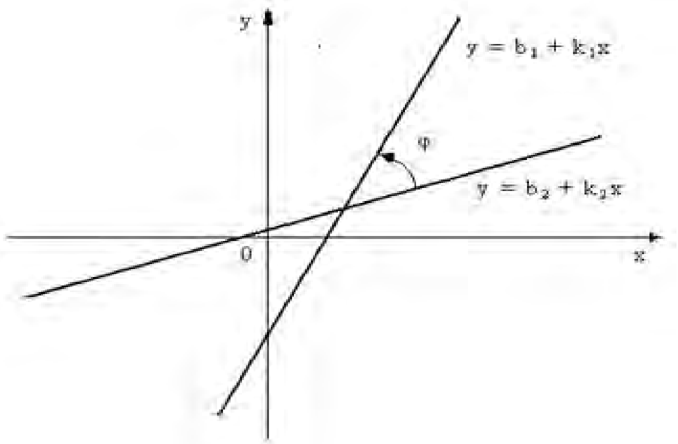
Пусть прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a, 0)$ а ось Oy — в точке $M_2(0, b)$. Подставляя в уравнение (54) координаты точек M_1 и M_2, найдем ***уравнение прямой в отрезках***:

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{55}$$

14.2 Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть даны две прямые L_1 и L_2, заданые уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис. 54).



Р и с . 5 4 . Угол между двумя прямыми

Под ***углом φ между прямыми***, понимают наименьший угол, на который нужно повернуть прямую L_2 против часовой стрелки до совмещения её с прямой L_1. Этот угол вычисляется по формуле:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1k_2}. \tag{56}$$

Условие параллельности прямых: если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\varphi = 0$и $\mathrm{tg}\varphi = 0$. Тогда из формулы (56) следует, что $k_2 - k_1 = 0$, т.е.

$$\boldsymbol{k_2 = k_1}. \tag{57}$$

Условие перпендикулярности*:* если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то $\varphi = 90$ и тогда tgφ не существует, а $c$tgφ $= \frac{1+k_2k_1}{k_2-k_1}$.

Отсюда, $1 + k_2k_1 = 0$, $k_2k_1 = -1$. Выразив отсюда k_2, получим:

$$\boldsymbol{k_2 = -\frac{1}{k_1}}. \tag{58}$$

<u>Пример 86</u>. Даны вершины треугольника ABC: A(0,1), B(4,4), C(5, −3). Найти:

1) уравнение стороны BC треугольника;
2) уравнение высоты AH;
3) уравнение медианы AM.

<u>Решение.</u>

1) Уравнение стороны BC треугольника составим, воспользовавшись формулой (54):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}; \qquad \frac{y-4}{3-4} = \frac{x-4}{5-4},$$

откуда $-7(x-4) = (y-4)$ или $y = -7x + 24$.

2) С учетом условия перпендикулярности двух прямых AH и BC, формула (41): $k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}} = \frac{1}{7}$

Тогда уравнение высоты AH найдем по формуле $y - y_1 = k(x - x_1)$, откуда $y - 1 = \frac{1}{7}(x -$ $y-1=\frac{1}{7}(x-0)$ или $x - 7y + 7 = 0$.

3) Для того, чтобы найти координаты середины отрезка BC точки $M(x, y)$, применим формулы:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ y = \frac{y_1+y_2}{2}. \tag{59}$$

Имеем: $x_1 = 4$, $y_1 = 4, x_2 = 5$, $y_3 = -3$, тогда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}\ ;\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Уравнение медианы AM составим по формуле (54): $\frac{y-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{x-0}{\frac{9}{2}-0}$,

откуда $-\frac{1}{2}x = \frac{9}{2}(y-1)$ или $x + 9y - 9 = 0$

Пример 87. Написать уравнение прямой, проходящей через точку А (2,0), параллельно прямой $y = 3x + 4$.

Решение. Так как прямая проходит через одну заданную точку, воспользуемся уравнением (53). Коэффициент k в нем найдем из условия параллельности прямых (57):

$$k_2 = k_1 = 3,\ \ y - 0 = 3(x - 2),\ \ y = 3x - 6.$$

Пример 88. Найти расстояние от точки А до прямой ВС, если $A(2,5), B(1,2), C(3,4)$.

Решение. Предварительно составим уравнение прямой BC, как прямой, проходящей через две заданные точки, формула (54):

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1),$$

$$y - 2 = x - 1,$$

$$x - y + 1 = 0.$$

Расстояние от точки до прямой вычисляется по формуле :

$$d = \frac{|1 \times 2 - 1 \times 5 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Пример 89. Определить взаимное расположение двух прямых $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$.

Решение.

Найдем: $k_1 = \frac{3}{5}$ и $k_2 = -\frac{5}{3}$, приведя оба уравнения к виду (52), видим, что $k_1 \cdot k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример 90. Найти угол между двумя прямыми $2x + y + 4 = 0$ и $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$.

Решение.

Для того, чтобы определить угловые коэффициенты прямых I и II, приведем их уравнения к виду (52), выразив из обоих уравнений *y:*

$$y = -2x - 4, y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Коэффициенты при y и есть угловые коэффициенты прямых

$$k_1 = -2 \text{ и } k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Угол между двумя прямыми находится по формуле (56):

$$\text{tg}\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}-2\right|}{1+(-2)(-\frac{1}{2})} = \frac{5}{4}.$$

14.3 Кривые второго порядка

Кривыми второго порядка являются линии, уравнения которых есть уравнения второй степени с двумя неизвестными:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Fy + F = 0. \qquad (60)$$

Причем, хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю.

К кривым второго порядка относятся: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

5.3.1. Окружностью радиуса R называется множество всех точек $M(x, y)$ плоскости, равноудаленных от данной точки $M_0(x_0, y_0)$, называемой центром (см. рис. 14).

Тогда, можем записать:

$$M_0M = R,$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R,$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R. \qquad (61)$$

Уравнение (61*)* называется ***нормальным уравнением окружности***.

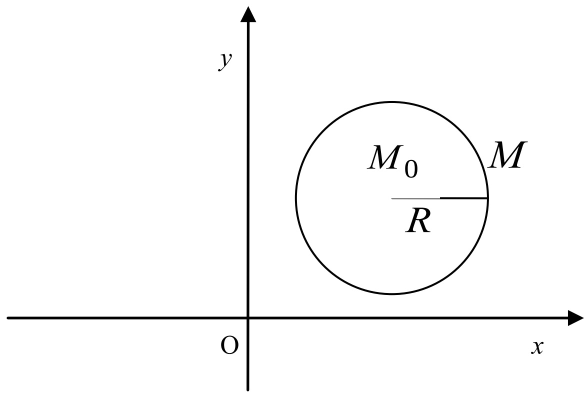
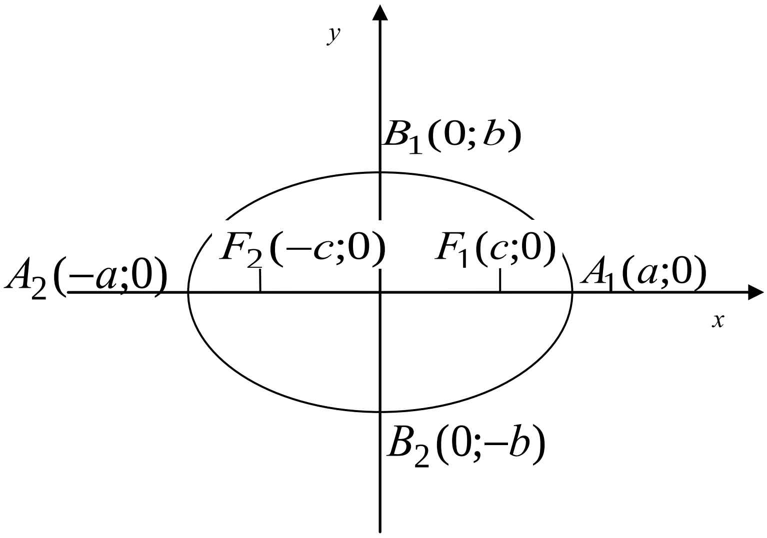


Рис. 54. Окружность

5.3.2. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, и большая, чем расстояние между фокусами $2c$ (см. рис. 15).



Р и с . 55. Эллипс

Обозначим фокусы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, а расстояние между ними $2c$.

Расстояние $A_1A_2 = 2a$ называется ***большей осью*** эллипса, а $B_1B_2 = 2b$ $-$ ***малой осью.***

Каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат имеет вид:

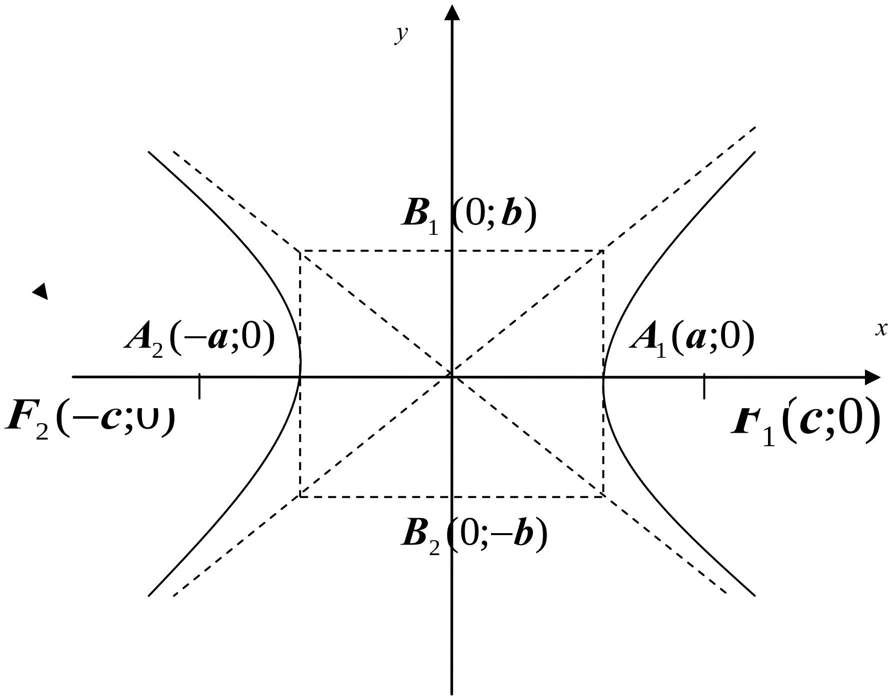
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{62}$$

где $b^2 = a^2 - c^2$. (63)

Отношение фокусного расстояния к длине большей оси называется ***эксцентриситетом*** эллипса и обозначается

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} < 1. \tag{64}$$

5.3.3. Гиперболой называется множество всех точек плоскости, разность расстояний каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ и меньшая, чем расстояние между фокусами $2c$ (см. рис. 56).



Р и с . 5 6 . Гипербола

Обозначим фокусы F_1и F_2, а расстояние между ними.

Расстояние$A_1 A_2 = 2a$ есть действительная ось гиперболы, а $B_1\, B_2 = 2b -$ мнимая ось.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a}\, x -$ асимптоты гиперболы.

Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{65}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$. (66)

Отношение фокусного расстояния к длине действительной оси называется **эксцентриситетом** гиперболы и обозначается

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} > 1. \tag{67}$$

5.3.4. Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Расстояние от фокуса F до директрисы – это параметр параболы $p\ (p > 0)$.

Канонические уравнения параболы с центром в начале координат:

1) Парабола симметрична относительно оси Ox, фокус правее директрисы, ветви направлены вправо (см. рис. 57).

$$y^2 = 2px \tag{68}$$

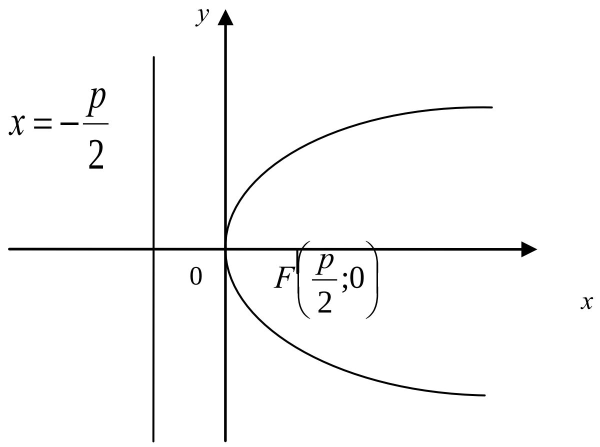


Рис. 57. Парабола $y^2 = 2px$

2) Парабола симметрична относительно оси Ox, фокус левее директрисы, ветви направлены влево (см. рис. 18).

$$y^2 = -2px \tag{69}$$

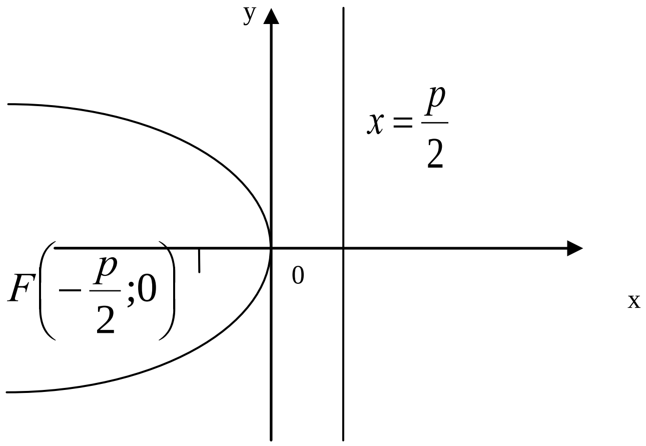
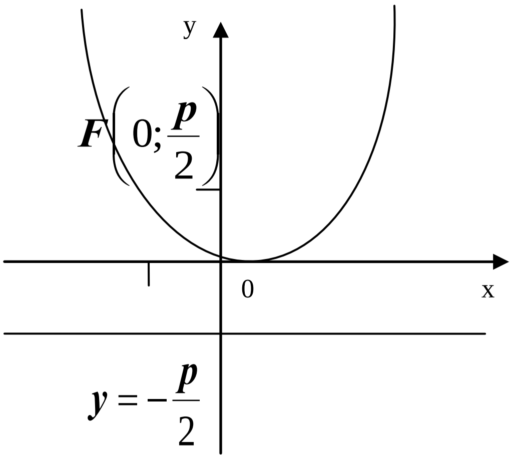


Рис. 58. Парабола $y^2 = -2px$

3) Парабола симметрична относительно оси Oy, фокус выше директрисы, ветви направлены вверх (см. рис. 59).

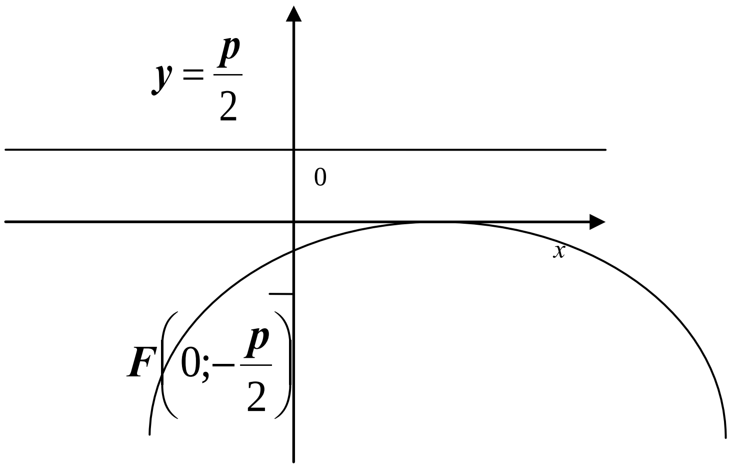
$$x^2 = 2py \tag{70}$$



Р и с . 5 9 . Парабола $x^2 = 2py$

4) Парабола симметрична относительно оси Oy, фокус ниже директрисы, ветви направлены вниз (см. рис. 60).

$$x^2 = -2py \tag{71}$$



Р и с . 6 0 . Парабола $x^2 = -2py$

<u>Пример 91.</u> Определить вид кривой II порядка $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 10 = 0$, используя метод выделения полных квадратов.

<u>Решение.</u> Сгруппируем слагаемые, содержащие x в одну скобку, а содержащие y в другую: $(x^2\ + 4x)\ + (y^2 + 8y)\ + 10 = 0.$

Дополним выражения в скобках до полных квадратов:

$$(x^2 + 4x + 4) - 4\ + (y^2 + 8y + 16) - 16 + 10 = 0,$$

$$(x+2)^2 \ +(y+4)^2 = 4+16-10,$$
$$(x+2)^2 \ +(y+4)^2 = 10.$$

Получили уравнение окружности с центром в точке $O(-2,-4)$ и радиусом $R=\sqrt{10}$.

Пример 92. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA, где A $(-12,-10)$,а O – начало координат.

Решение. Для того, чтобы найти координаты центра кривой $M_0(x_{0,}y_{0)},$ применим формулы для нахождения координат середины отрезка:

Имеем: $x_1=-12,\ y_1=-10,\ x_2=0,\ y_2=0.$

Тогда найдем $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-12+0}{2}=-6$ и $y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-10+0}{2}=-5$

Радиус окружности найдем по формуле:

$$R=OM_O=\sqrt{(-6-0)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{61}$$

Воспользуемся нормальным уравнением окружности:

$$(x+6)^2+(y+5)^2=61.$$

Пример 93. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого большая полуось а $=5$, а эксцентриситет π= $^3/_5$.

Решение. Найдем малую полуось b, используя формулу:
$b^2=a^2-c^2$.

Величину параметра с определим по формуле: $c=\varepsilon a$=$5\cdot\frac{3}{5}=3$.

получим:

$$b^2=25-9=16.$$

Тогда, каноническое уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

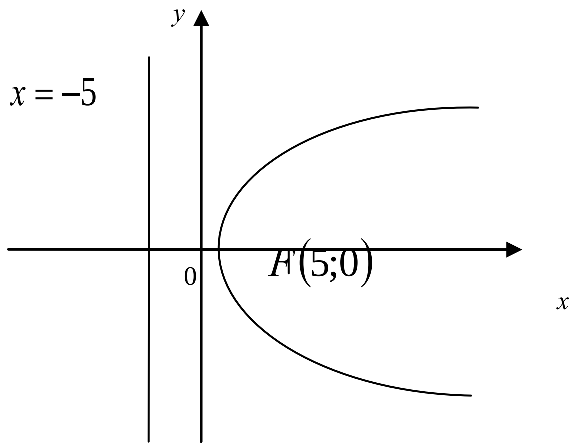
Пример 94. Построить параболу, если задана ее директриса $x=-5$.

Решение:

Каноническое уравнение параболы в данном случае имеет вид: $y^2 = 2px$, а уравнение ее директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

Исходя из условия задания, $-\frac{p}{2} = -5$, отсюда $p = 10$. Каноническое уравнение кривой примет вид: $y^2 = 10x$.

Строим параболу:



Р и с . 6 1 . Парабола

Пример 95. Вычислить эксцентриситет ε и определить фокусное расстояние 2с гиперболы $3x^2 - 12y^2 = 36$.

Решение. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду, разделив на 36 обе части равенства: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$.

Видим, что действительная полуось $a = \sqrt{12}$, а мнимая полуось $b = \sqrt{3}$.

Для гиперболы справедливо равенство:
$b^2 = c^2 - a^2$, отсюда $c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 3 = 15$, $c = \sqrt{15}$.

Тогда, фокусное расстояние $2c = 2\sqrt{15}$.

Эксцентриситет гиперболы определим по формуле: $\varepsilon = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$.

14.4 Вопросы для самопроверки

1. Общее уравнение прямой.
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через точку в заданном направлении.
4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
5. Формула для нахождение угла между двумя прямыми.
6. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
7. Виды кривых II порядка.
8. Что называют окружностью?
9. Нормальное уравнение окружности.
10. Что такое гипербола?
11. Каноническое уравнение гиперболы.
12. Понятие эксцентриситета гиперболы.
13. Определение параболы.

15 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [16], [17], [18], [19].

15.1 Случайные события

Всякое действие, явление, происходящее при определенной совокупности условий, называют ***испытанием***, результат испытания называют событием.

Наблюдаемые нами события можно подразделить на следующие три вида:

- достоверные;
- невозможные;
- случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать.

События называют ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События называют ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События называют ***равновозможными***, если есть основание считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Совокупность всех единственно возможных событий испытания называют ***полной группой событий***.

Противоположными называют два единственно возможных события образующих полную группу событий.

Суммой событий А и В называют событие, состоящее в появлении или события А, или события В, или обоих событий.

Произведением двух событий А и В называют событие, состоящее и в появлении события А, и в появлении события В.

15.2 Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность

Вероятность является одним из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Рассмотрим определение, которое называют классическим.

Каждый из возможных результатов испытания, т.е. каждое событие, которое может наступить в испытании, назовем ***элементарным исходом.***

Те элементарные исходы, при которых интересующее нас событие наступает, назовем благоприятствующими этому событию.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех единственно возможных и равновозможных исходов испытания.

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A; n — число всех возможных элементарных исходов испытания.

Вероятность есть число, характеризующее возможность появления события.

<u>Пример</u>. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что на верхней грани появится нечетное число.

<u>Решение.</u>

Пусть событие A — «на верхней грани появится нечетное число». Число благоприятствующих событию A исходов $m = 3$(выпадет $1,3,5$); число возможных исходов $n = 6$.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей $0 \le P(A) \le 1$.

Наряду с вероятностью, к основным понятиям теории вероятностей относится относительная частота.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

$$W(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Пример. По цели произвели 15 выстрелов, причем было зарегистрировано 9 попаданий. Определить относительную частоту поражения цели.

Решение. Относительная частота поражения цели $W(A)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}=0{,}6$.

Геометрическое определение вероятности появилось, благодаря попытке отказаться от конечности m и n. Пусть на плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. Требуется найти вероятность того, что точка, взятая наудачу в области G, попадет в область g. При этом, выражению «точка, взятая наудачу в области G» придается следующий смысл: эта точка может попасть в любую точку области G.

Вероятность попадания точки в какую либо область G пропорциональна мере (mes) этой части (длине, площади, объему и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы:

$$P(A)=\frac{mes(g)}{mes(G)}.$$

15.3 Элементы комбинаторики

Формулы комбинаторики составляют теоретическую базу при использовании классического определения вероятности, которое в прикладных задачах играет большую роль.

В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций:

- перестановки;
- размещения;
- сочетания.

1) Комбинации из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называют ***перестановками.*** Обозначаются символом P_n.

$$\boldsymbol{P_n=n!}$$

$$\boldsymbol{n}!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot \boldsymbol{n},\ 0!=1.$$

Пример. В школьном соревновании участвовало 3 класса, сколько существует вариантов распределить места между ними.

Решение. Количество вариантов распределения трех классов по местам равно числу перестановок из трех элементов:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot = 6.$$

2) Комбинации из n элементов по k элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами, или порядком элементов называют ***размещениями.*** Обозначаются символом $\grave{A}_n^k$, где количество всех имеющихся элементов; k — количество элементов в каждой комбинации $(k \leq n)$.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Размещения с повторением:

$$B_n^k = n^k.$$

Пример. Из пяти карточек с буквами К, Л, М, Н, О наугад одну за другой выбирают три и располагают в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово «ЛОМ»?

Решение. Обозначим A событие, состоящее в том, что получится слово «ЛОМ». Благоприятствует событию A только один исход, $m = 1$ (комбинация букв «ЛОМ»). Общее число возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 3 карточки из имеющихся 5:

$$n = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Тогда, искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_5^3} = \frac{1}{60}.$$

3) ***Сочетаниями*** называют все возможные комбинации из n элементов по k элементов, которые отличаются друг от друга, по крайней мере хотя бы одним элементом. Обозначаются символом $\tilde{N}_n^k$, где n — количество всех имеющихся элементов; k — количество элементов в каждой комбинации $(k \leq n)$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать 3 студентов, из группы, в которой 30 человек.

Решение. Используем число размещений из 30 элементов по 3:

$$C_{30}^{3}=\frac{30!}{3!\cdot(30-3)!}=\frac{30!}{3!\cdot 27!}=\frac{27!\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 27!}=4060.$$

15.4 Теоремы сложения и умножения вероятностей

1) Теорема сложения вероятностей несовместных событий: вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие 1: вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Следствие 2: сумма вероятностей событий, образующих полную группу событий равна единице.

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1,$$

где $\{A_1;A_2;...;A_n\}$ – полная группа событий.

Следствие 3: вероятность события, противоположного событию A, равна разности между единицей и вероятностью события A.

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

2) Теорема сложения вероятностей совместных событий: вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий (например, для трех совместных событий):

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

.

<u>Пример.</u> Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0.2; вероятность выбить 9 очков, равна 0.4. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

<u>Решение</u>. Обозначим C событие, состоящее в том, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков. Событие C произойдет, если стрелок выбьет или 10 очков (событие A), или 9 очков (событие B), т.е. C — сумма событий A и B. События A и B несовместные (попадание в

10 исключает попадание в 9 при одном выстреле, и наоборот), поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6.$$

Два события называют ***независимыми***, если вероятность одного из них не зависит от появления другого.

Два события называют ***зависимыми***, если вероятность появления одного из них зависит от наступления другого события.

3) Теорема умножения вероятностей независимых событий: вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие: вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример. Два охотника одновременно выстрелили по тигру. Вероятность попадания для первого охотника $p_1 = 0{,}7$, для второго $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятности следующих событий:

1) оба охотника попадут в тигра;
2) оба охотника промахнутся;
3) только один охотник попадет в цель;
4) хотя бы один охотник попадет в цель.

Решение.

1) Обозначим A событие, состоящее в том, что оба охотника попадут в цель. Используем теорему умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

2) Обозначим B событие, состоящее в том, что оба охотника промахнутся. Найдем вероятности промаха для каждого охотника. Вероятность промаха для первого охотника: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; вероятность промаха для второго охотника: $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, тогда искомая вероятность:

$$P(B) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

3) Обозначим C событие, состоящее в том, что только один охотник попадет в тигра. Событие C произойдет, если «первый охотник попадет в цель и второй промахнется» или «первый охотник промахнется в цель и второй попадет». Искомая вероятность:

$$P(C) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38.$$

4) Событие D — «хотя бы один охотник попадет в тигра» является противоположным событию B – «оба промахнутся»:

$$P(D) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$$

Если события A и B зависимые, то условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

4) Теорема умножения вероятностей зависимых событий: вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Пример. На вечеринке разыгрываются 20 лотерейных билетов, причем 15 из них с выигрышами. Студент вытаскивает наудачу два билета. Найти вероятность того, что оба билета окажутся с выигрышем.

Решение. Обозначим событие A — «первый билет с выигрышем», событие B — «второй билет с выигрышем».

Вероятность наступления события A по формуле нахождения вероятности будет равна: $P(A) = \dfrac{15}{20}$, здесь при вытаскивании первого билета возможных исходов 20, а благоприятных для события A — 15 исходов (количество билетов с выигрышем). При вычислении условной вероятности $P_A(B)$ учтем, что возможных исходов будет 19 (так как один билет уже вынут), а выигрышных билетов останется 14. Тогда $P_A(B) = \dfrac{14}{19}$. Окончательно имеем, что вероятность того, что оба билета окажутся с выигрышем будет равна

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{21}{38}.$$

15.5 Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$, которые образуют полную группу. Известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{B_1}(A)$,

$P_{B_2}(A)$, …, $P_{B_n}(A)$ события A. В поставленных условиях вероятность события A можно найти по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A),$$

где события B_1, B_2, …, B_n называют гипотезами.

<u>Пример</u>. На контроль поступают детали с двух станков. Производительность станков различна. На первом станке изготовляют 60% всех деталей, на втором — 40%. Вероятность брака на первом станке $0{,}02$, на втором — $0{,}04$. Найти вероятность того, что поступившая на контроль деталь бракованная.

<u>Решение</u>. Событие A — «поступившая на контроль деталь бракованная». B_1 и B_2 — события, означающие, что деталь сделана соответственно на первом и втором станке. Тогда по условию задачи:

$$P(B_1) = \frac{60}{100} = 0{,}6; \; P(B_2) = \frac{40}{100} = 0{,}4;$$

$$P_{B_1}(A) = 0{,}02; \; P_{B_2}(A) = 0{,}04.$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}04 = 0{,}028.$$

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, которые образуют полную группу. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \; i = 1,2,...,n,$$

где $P(A)$ находят по формуле полной вероятности.

<u>Пример.</u> *В условиях предыдущего примера проверенная деталь оказалась бракованной. Определить вероятность того, что она была изготовлена на первом станке.*

<u>Решение.</u> Искомая вероятность $P_A(B_1)$ — вероятность того, что деталь изготовлена на первом станке, при условии, что уже известно, что деталь бракованная.

По формуле Бейеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Из предыдущего примера известно, что

$$P(B_1)=\frac{60}{100}=0{,}6;\ P_{B_1}(A)=0{,}02;\ P(A)=0{,}028.$$

Тогда, искомая вероятность равна

$$P_A(B_1)=\frac{0{,}6\cdot 0{,}02}{0{,}028}\approx 0{,}43.$$

15.6 Повторные независимые испытания

Испытания называют ***повторно независимыми***, если испытания являются независимыми и вероятность появления события $\grave{A}$ в каждом испытании постоянна.

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события $\grave{A}$ постоянна и равна p. Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что при n повторных испытаниях событие A произойдет k раз. При этом:

- если $n\le 10$, то используют формулу Бернулли:

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot p^k\cdot q^{n-k},$$

где $q=1-p$ — вероятность не наступления события $\grave{A}$ в каждом испытании.

- Если $n>10$ и $p\ge 0{,}1$, то используют локальную теорему Лапласа:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

где $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Значения $\varphi(x)$ находят по таблице, которая имеется в большинстве учебников и задачников по теории вероятностей. Функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, таблица содержит значения функции $\varphi(x)$ лишь для $x\in[0;4]$; для $x>4$ можно принять $\varphi(x)=0$.

- Если $n>10$ и $p<0{,}1$, (либо $n\cdot p\le 10$) то используют формулу Пуассона:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda=np$.

Пример. Процент всхожести семян 80%. Определить вероятность того, что из 1000 посеянных семян взойдут 780.

Решение. Т.к. процент всхожести семян 80%, то вероятность взойти для каждого семени постоянна и равна $p=\frac{80}{100}=0{,}8$. Количество посеянных семян (общее количество испытаний) $n=1000$. Т.к. $n>10$ и $p\geq 0{,}1$, то используем локальную теорему Лапласа:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)\text{, где } x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}};$$

Т.к. $k=780$; $q=1-0{,}8=0{,}2$, то $x=\frac{780-1000\cdot 0{,}8}{\sqrt{1000\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\approx -1{,}58$.

По таблице значений функции $\varphi(x)$, учитывая четность функции, найдем:

$\varphi(-1{,}58)=\varphi(1{,}58)=0{,}1145$.

Тогда, искомая вероятность:

$$P_{1000}(780)\approx\frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\cdot 0{,}1145\approx 0{,}0091.$$

Пример. Вероятность того, что станок изготовит бракованное изделие, равна $0{,}02$. Найти вероятность того, что из 400 произведенных станком изделий:1) ровно 3 бракованных;2)не менее 3 бракованных.

Решение. Вероятность изготовления бракованного изделия постоянна и равна $p=0{,}02$. Общее количество изготовленных изделий (общее количество испытаний) $n=400$. Т.к. $n>10$ и $p<0{,}1$, то используем формулу Пуассона: $P_n(k)\approx\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda=np$.

1) Среди изготовленных изделий ровно 3 бракованных: $k=3$, $\lambda=400\cdot 0{,}02=8$.

Тогда, искомая вероятность:

$$P_{400}(3)\approx\frac{8^3\cdot e^{-8}}{3!}=\frac{512\cdot 0{,}000335}{6}=0{,}0286.$$

2) Для определения вероятности того, что среди изготовленных деталей не менее 3 бракованных целесообразно найти вероятность противоположного события: «среди изготовленных деталей меньше 3 бракованных».

$P_{400}(k\geq 3)=1-P_{400}(k<3)$.

Событию «среди изготовленных деталей меньше 3 бракованных», благоприятны исходы: 0 бракованных деталей, или 1 бракованная деталь, или 2 бракованные детали.

Используя теорему сложения вероятностей несовместных событий и формулу Пуассона, найдем вероятность того, что среди изготовленных деталей меньше 3 бракованных:

$$P_{400}(k<3)=P_{400}(0)+P_{400}(1)+P_{400}(2);$$

$$P_{400}(0)\approx\frac{8^0\cdot e^{-8}}{0!}=\frac{1\cdot 0{,}000335}{1}=0{,}000335;$$

$$P_{400}(1)\approx\frac{8^1\cdot e^{-8}}{1!}=\frac{8\cdot 0{,}000335}{1}=0{,}00268;$$

$$P_{400}(2)\approx\frac{8^2\cdot e^{-8}}{2!}=\frac{64\cdot 0{,}000335}{2}=0{,}01073;$$

Следовательно,

$$P_{400}(k<3)=0{,}00034+0{,}00268+0{,}01073=0{,}01375.$$

Искомая вероятность:

$$P_{400}(k\geq 3)=1-0{,}01375=0{,}98625.$$

Предположим, что проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события $\grave{A}$ постоянна и равна p. Требуется найти вероятность $P_n(k_1;k_2)$ того, что при n повторных испытаниях событие $\grave{A}$ произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз. Это можно сделать с помощью интегральной теоремы Лапласа:

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$.

Значения $\Phi(x)$ находят по таблице. Функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, таблица содержит значения функции $\Phi(x)$лишь для $x\in[0;5]$; для $x>5$ можно принять $\Phi(x)=0{,}5$.

Пример. Вероятность того, что деталь изготовлена с нарушениями стандартов равна $0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 800 случайно отобранных деталей нестандартных окажется от 140 до 200 деталей.

Решение. По условию $n=800$, $k_1=140$, $k_2=200$, $p=0{,}2$, следовательно, $q=1-0{,}2=0{,}8$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),\text{ где } x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Найдем x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{140 - 800 \cdot 0{,}2}{\sqrt{800 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \approx -1{,}77;$$

$$x_2 = \frac{200 - 800 \cdot 0{,}2}{\sqrt{800 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \approx 3{,}54.$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$, учитывая нечетность функции, найдем:

$$\Phi(-1{,}77) = -\Phi(1{,}77) = -0{,}4616;$$

$$\Phi(3{,}54) = 0{,}4997.$$

Искомая вероятность:

$$P_{800}(140; 200) \approx \Phi(3{,}54) - \Phi(-1{,}77) = 0{,}4997 - (-0{,}4616) = 0{,}9613.$$

15.7 Дискретные и непрерывные случайные величины. Числовые характеристики случайных величин

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Математическое ожидание служит характеристикой среднего значения случайной величины.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Вычислять дисперсию удобно по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Для дискретной случайной величины $M(X^2)$ находится по формуле:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение служат характеристиками степени рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания.

Пример. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	-2	2	3	4	7
p	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

Решение. Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности:

$M(X) = -2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 7 \cdot 0,1 = 2,1.$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой:

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$

Составим закон распределения X^2:

X^2	4	4	9	16	49
p	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

Найдем математическое ожидание X^2:

$M(X^2) = 4 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,3 + 49 \cdot 0,1 = 13,1.$

Подставив в формулу для вычисления дисперсии $M(X^2)$ и $M(X)$, найденные ранее, получим:

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13,1 - 4,41 = 8,69.$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{8,69} \approx 2,948.$

Интегральной функцией распределения непрерывной случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Интегральная функция обладает следующими *свойствами*:

Свойство 1. Значения интегральной функции принадлежат отрезку $[0,1]$:

$0 \le F(x) \le 1$.

Свойство 2. Интегральная функция есть неубывающая функция, т.е.

$F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 \ge x_1$.

Следствие. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (a,b), равна приращению интегральной функции на этом интервале:

$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Дифференциальной функцией распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют первую производную от интегральной функции:

$f(x) = F'(x)$.

Зная дифференциальную функцию, можно найти интегральную функцию по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Пример. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ x - \dfrac{1}{2}, & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) интегральную функцию $F(x)$ и построить ее график; б) вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(\frac{3}{2}, 2)$.

Решение. а) Воспользуемся формулой $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Если $x \le 1$, то $f(x) = 0$, следовательно, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{x} (x - \frac{1}{2})dx = \frac{1}{2}(x^2 - x)$.

Если $x > 2$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} (x - \frac{1}{2})dx + \int_{2}^{x} 0dx = \frac{1}{2}(x^2 - x)\Big|_{1}^{2} = 1$.

Итак, искомая интегральная функция имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{1}{2}(x^2-x), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

График этой функции приведен на рис.1.

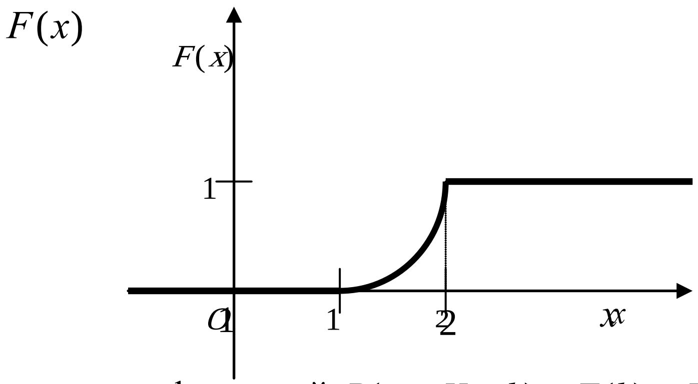


Рис.1

б) Воспользуемся формулой $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

По условию $a=\frac{3}{2}$, $b=2$. Следовательно, искомая вероятность:

$$P\left(\frac{3}{2}<X<2\right)=\frac{1}{2}\left[\left(2^2-2\right)-\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{5}{8}.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx,$$

где $f(x)$ — дифференциальная функции.

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (a,b), то $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$.

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат Ox, определяется равенством

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx,$$

или равносильным равенством

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2 .$$

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (a,b), то

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx,$$

или

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2 .$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

<u>Пример</u>. Случайная величина X задана дифференциальной функцией

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ \frac{1}{2}, & -1\le x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

<u>Решение</u>. Найдем математическое ожидание

$$M(X)=\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1} x\cdot\frac{1}{2}dx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Учитывая, что $M(X)=0$ получим

$$D(X)=\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx=\int_{-1}^{1} x^2\cdot\frac{1}{2}dx=\int_{0}^{1} x^2 dx=\frac{1}{3}.$$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

15.8 Законы распределения случайной величины

Законом распределения называют соответствие между значениями случайных величин и их вероятностями.

Для дискретных случайных величин закон распределения задается в виде таблицы.

а) Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Тогда случайная величина X – это число появления события A в n независимых испытаниях.

Закон распределения случайной величины X описывается формулой Бернулли и называется ***биномиальным***. Он называется так, потому что правую часть формулы $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n \cdot p^n + C_n^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \ldots + C_n^0 \cdot q^n.$$

Биномиальный закон можно записать в виде таблицы:

X	n	$n-1$	…	k	..	0
p	p^n	np^{n-}	…	$C_n^k p^k q$	..	q^n

$M(x) = np$,
$D(x) = npq$.

Пример. Игральная кость брошена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадения пяти очков. Найти $M(x)$ и $D(x)$.

Решение. Вероятность выпадения пяти очков при каждом бросании кости $p = \frac{1}{6}$. Следовательно, вероятность того, что пять очков не выпадет, равна $p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. При двух бросаниях кости пять очков может появиться либо два раза, либо один раз, либо ни разу. Таким образом, возможные значения X таковы: $\tilde{o}_1 = 2$, $\tilde{o}_2 = 1$, $\tilde{o}_3 = 0$.

Найдем вероятности возможных значений случайной величины по формулам:

$$P_2(2) = C_2^2 \cdot p^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 36;$$

$$P_2(1) = C_2^1 \cdot pq = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18};$$

$$P_2(0) = C_2^0 \cdot q^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

Запишем искомый закон распределения:

X	2	1	0
p	$1/36$	$5/18$	$25/36$

Можно увидеть, что $\frac{1}{36} + \frac{5}{18} + \frac{25}{36} = 1.$

$$M(x) = np = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

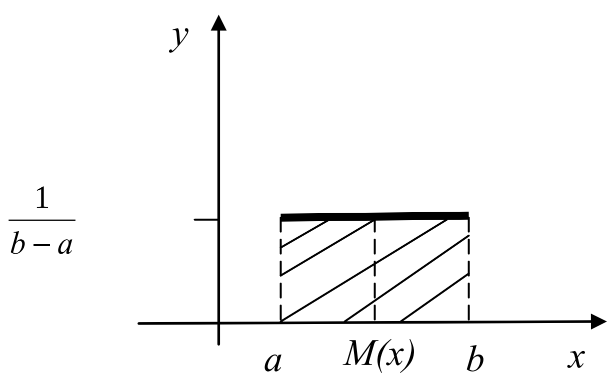
$$D(x) = npq = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}.$$

На практике приходится часто сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин. Дифференциальные формулы этих распределений называют также плотностью распределения.

б) Распределение вероятности называют ***равномерным,*** если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, дифференциальная функция имеет постоянное значение. Аналитический закон равномерно распределенной величины можно записать так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

График дифференциальной функции распределения изображен на рис.1.



Р и с. 1.

Площадь заштрихованного прямоугольника всегда равна 1.

$$M(x)=\frac{a+b}{2};$$

$$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной дифференциальной функцией распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Решение.

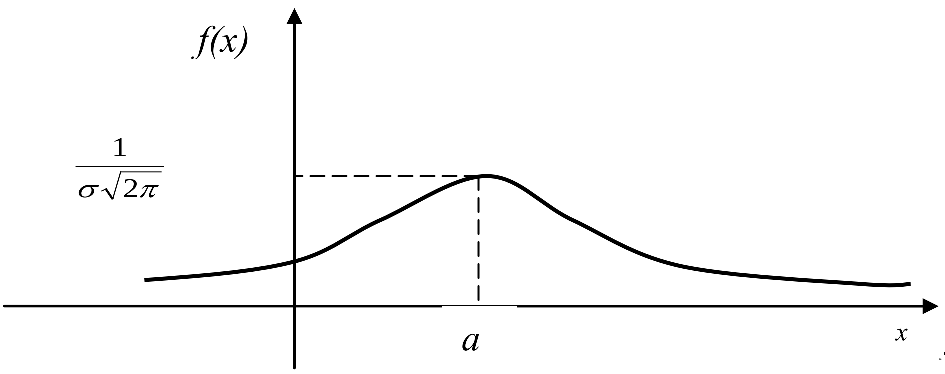
$$M(x)=\frac{a+b}{2}=\frac{0+2}{2}=1;$$

$$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(2-0)^2}{12}=\frac{1}{3}.$$

в) ***Нормальным*** называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается дифференциальной функцией

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Видно, что нормальное распределение определяется двумя параметрами: a — математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение нормального распределения. Кривая $y=f(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 2.



Р и с. 2.

Заметим, что при $a=0$ и $\sigma=1$ нормальную кривую называют нормированной,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

<u>Пример.</u> Дифференциальная функция нормального распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{18}}.$$

Найти $M(x)$ и $D(x)$.

<u>Решение.</u> Согласно общему виду закона нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

находим, что $a=4$ и $\sigma=3$. Отсюда, $M(x)=a=4$, $D(x)=\sigma^2=9$.

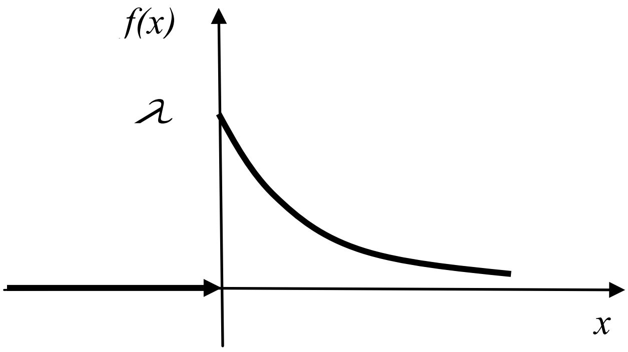
г) ***Показательным (экспоненциальным)*** называют распределение вероятностей, которое описывается дифференциальной функцией вида:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda\cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases},$$

где λ — постоянная величина.

Это распределение определяется одним параметром λ, что преимущественно по сравнению с другими законами распределениями.

График дифференциальной функции показательного распределения изображен на рис. 3.



Р и с. 3.

$$M(x)=\sigma(x)=\frac{1}{\lambda};$$

$$D(x)=\sigma^2(x)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Пример. Найти $M(x)$ и $D(x)$ случайной величины X, распределенной по показательному закону:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 3e^{-3x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Решение. По условию $\lambda=3$, следовательно $M(x)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{3}$, $D(x)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{9}$.

15.9 Вопросы для самопроверки

1. Классификация событий, операции над ними
2. Классическое, геометрическое и статистическое определение вероятности
3. Формулы комбинаторики для вычисления вероятностей
4. Теоремы сложения. Условная вероятность, теоремы умножения
5. Формулы полной вероятности и Байеса
6. Формула Бернулли
7. Локальная и интегральная теоремы Лапласа
8. Дискретные и непрерывные случайные величины
9. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины
10. Плотность распределения вероятностей

16 Индивидуальные задания и тесты для самопроверки

16.1 Индивидуальное задание №1

1) 1.1. Найти меру множества: $((2,7)\cap(5,8))\cup[10,12)$

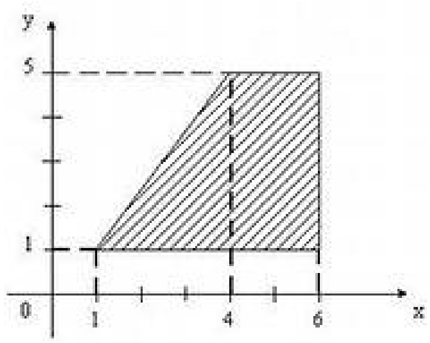
1.2. Найти меру множества: $(-2,3]\cup[1,\ 2]$

1.3. Найти меру множества: $(4,9)\cup(6,7)$

1.4. Найти меру множества: $[0,5]\cap(1,4)$

1.5. Найти меру множества: $[1,4]\cup((-5,0)\cap(-2,3))$

2) 2.1. Найти меру заштрихованного множества.

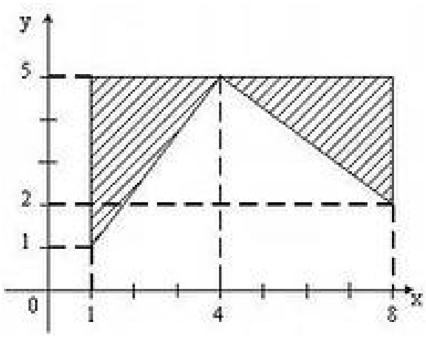


1) 14   2) 16   3) 18

2.2. Найти меру заштрихованного множества.

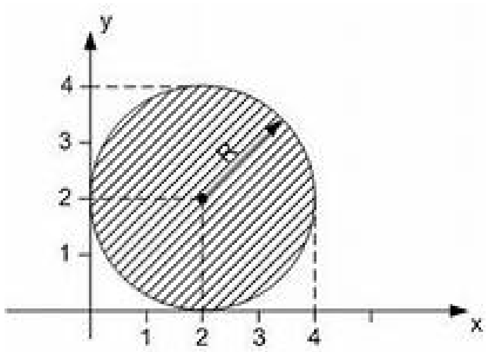
1) 24-π 2) 24 3) 24+π

2.3. Найти меру заштрихованного множества.



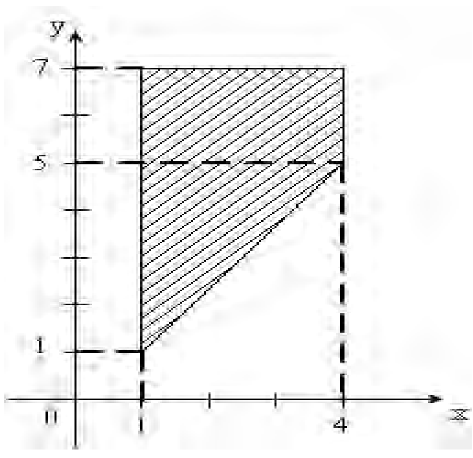
1)8 2) 10 3) 12

2.4. Найти меру заштрихованного множества.



1) 2π 2) 3π 3) 4π

2.5. Найти меру заштрихованного множества.



1)15 2) 20 3) 28

3)

3.1. Справедливо ли равенство

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

1) да
2) нет

3.2. Справедливо ли равенство

$A \setminus (A \cap B) = \left(A \cup B\right) \setminus B$

1) да
2) нет

3.3. Справедливо ли равенство

$(A \cap B) \cup (A \setminus C) = \left(A \cup B\right) \setminus C$

1) да
2) нет

3.4. Справедливо ли равенство

$\left(A \setminus B\right) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

1) да
2) нет

3.5. Справедливо ли равенство

$\left(A \cap B\right) \cup (A \cap C) = A \cap \left(C \cup B\right)$

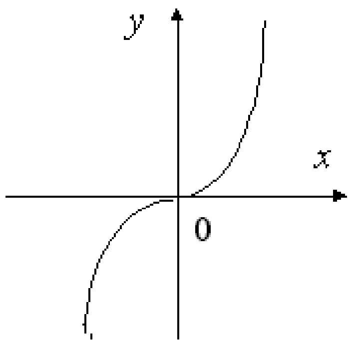
1) да
2) нет

16.2 Индивидуальное задание №2

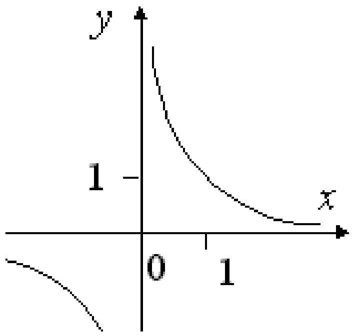
1) Выбрать правильный ответ.

1.1. Графиком функции y= x^3 служит:

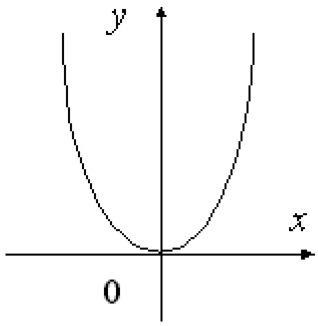
а)



b)

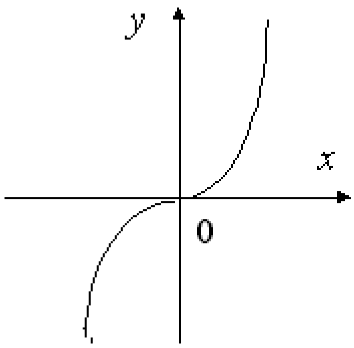


c)

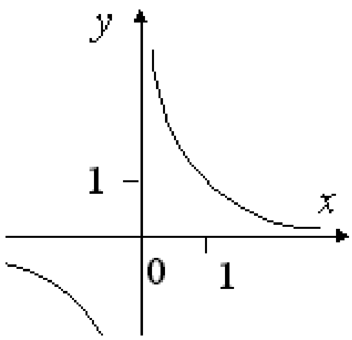


1.2. Графиком функции y= $\frac{1}{x}$ служит:

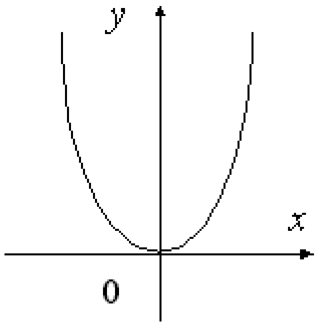
a)



b)

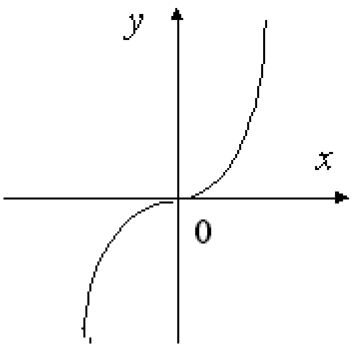


c)

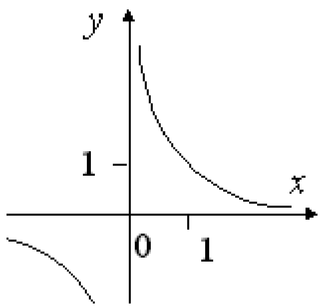


1.3. Графиком функции y= x^2 служит:

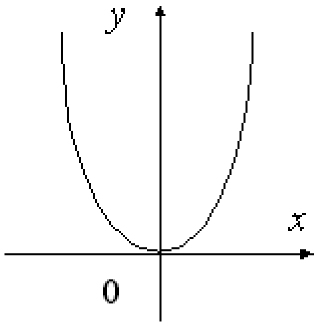
a)



b)

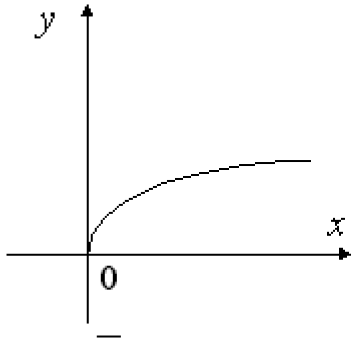


c)

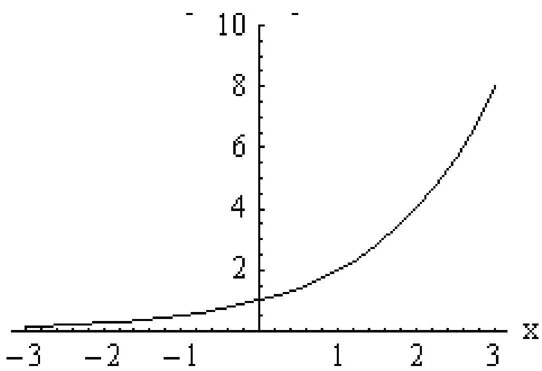


1.4. Графиком функции y=$\sqrt{x}$ служит:

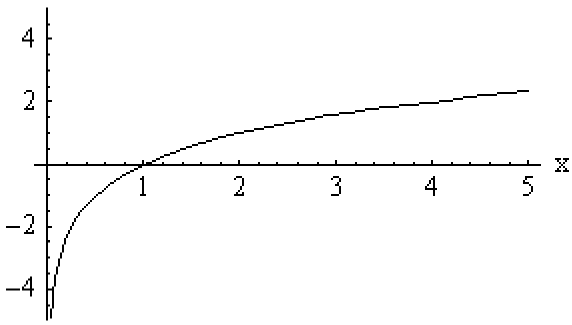
a)



b)

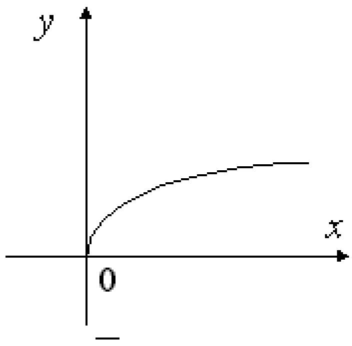


c)

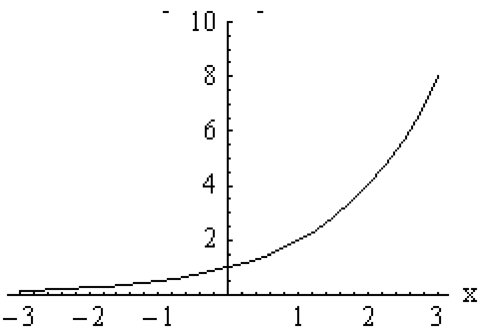


1.5. Графиком функции y=a^x служит:

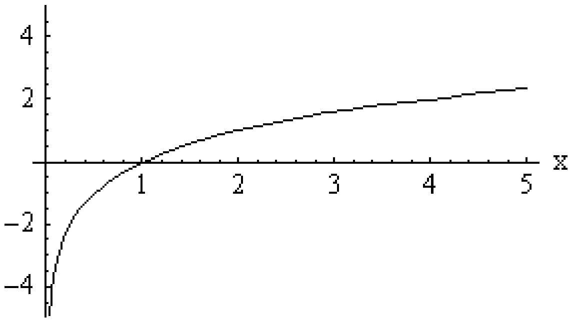
a)



b)

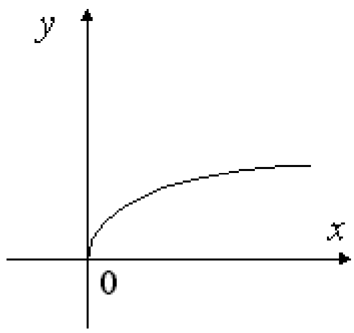


c)

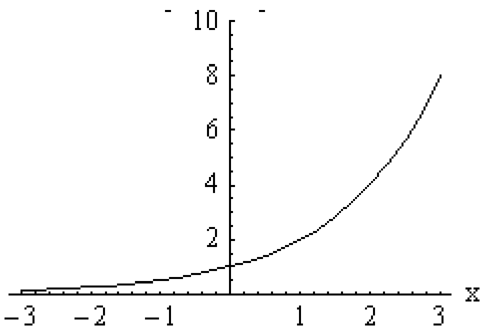


1.6. Графиком функции y= $\log_a x$. служит:

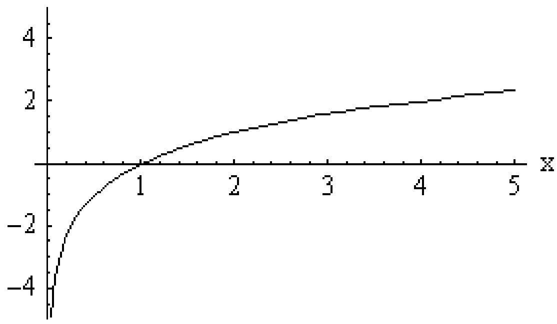
a)



b)



c)



2) 2.1. Среди перечисленных функций четной функцией является:

a) $y = -3x^2 - sinx$;

b) $y = 4x^4 - 3x^2 - 6$;

c) $y = sin4x$;

d) $y = \sqrt{x}$.

2.2. Областью определения функции $y = \sqrt{2x-6}$ является промежуток:

a) $(-\infty;3]$;

b) $(-\infty;3)$;

c) $[3;+\infty)$.

2.3. Областью определения функции $y = \sqrt{5x-10}$ является промежуток:

a) $(2;+\infty)$;

b) $(-\infty;2]$;

c) $(-\infty;2)$;

d) $[2;+\infty)$.

2.4. Число точек разрыва функции $y = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ равно:

a) 3;
b) 4;
c) 1;
d) 0.

2.5. Областью определения функции $y = \sqrt{2x-6}$ является промежуток:

a) $(3;+\infty)$;
b) $(-\infty;3]$;
c) $(-\infty;3)$;
d) $[3;+\infty)$.

16.3 Индивидуальное задание №3

1. Вычислить указанные пределы:

1.1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{4}{x}}$.

1.2. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$.

1.3. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{x+\sqrt[3]{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{arctg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

1.4. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{2x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{x^3+x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}6x}{\mathrm{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{2x}$.

1.5. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2-5x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg}2x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$.

1.6. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8+2x-x^2}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+3}{x^3+2x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x}$.

1.7. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x+x^2}{2x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x}$.

1.8. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{2x}$.

1.9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^3+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$.

1.10. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+2}{x^3-x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^{x}$.

1.11. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{4}{x}}$.

1.12. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$.

1.13. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{x+\sqrt[3]{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{arctg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

1.14. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{2x}$.

1.15. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^3+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$.

1.16. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+2}{x^3-x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^{x}$.

1.17. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{2x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{x^3+x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}6x}{\operatorname{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{2x}$.

1.18. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2-5x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg}2x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$.

1.19. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8+2x-x^2}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+3}{x^3+2x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x}$.

1.20. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x+x^2}{2x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x}$.

16.4 Индивидуальное задание №4

1. Найти производные заданных функций:

1.1. а) $y=3x^4-\dfrac{5}{3x^3}-9\sqrt[3]{x^2}-1$; б) $y=\dfrac{3x^5+7}{\operatorname{ctg}2x}$; в) $y=(2+\cos x)^3$;

1.2. а) $y=2x^5-\dfrac{1}{3x^3}+4\sqrt[4]{x}+3$; б) $y=\dfrac{x+3}{\sin 2x}$; в) $y=\sqrt{(\operatorname{tg}x)}$;

1.3. а) $y=5x^6-\dfrac{3}{2x^4}+8\sqrt[4]{x^3}-7$; б) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\operatorname{tg}x}$; в) $y=\left(e^x-2\right)^5$;

1.4. а) $y=2x^3-\dfrac{2}{x^6}+3\sqrt[3]{x^2}+5$; б) $y=\dfrac{4x}{\sin 3x}$; в) $y=\left(4-\sqrt[5]{x}\right)^2$;

1.5. а) $y=4x^2-\dfrac{5}{6x^6}+10\sqrt[5]{x^4}-2$; б) $y=\dfrac{e^{8x}}{\sqrt{x+1}}$; в) $y=(\sin x-4)^3$;

1.6. а) $y=x^5+\dfrac{1}{2x^2}-4\sqrt{x}+3$; б) $y=\dfrac{\arcsin 6x}{x+3}$; в) $y=(\ln x)^5$;

1.7. а) $y=3x^5-\dfrac{2}{3x^3}+6\sqrt[3]{x^2}-9$; б) $y=\dfrac{x^2+4}{\cos 7x}$; в) $y=\left(5-2\sqrt{x}\right)^4$;

1.8. а) $y=4x^2-\dfrac{3}{x^2}+5\sqrt[5]{x^3}+6$; б) $y=\dfrac{\operatorname{tg}2x}{1-x^3}$; в) $y=\sqrt[3]{(3+4x)}$;

1.9. а) $y=3x+\dfrac{4}{x^3}-3\sqrt[3]{x^2}-4$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\ln 3x}$; в) $y=\left(3x-e^x\right)^2$;

1.10. а) $y=5x^2-\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}+8$; б) $y=\dfrac{e^{4x}}{x^2+1}$; в) $y=\sqrt[5]{(1+\cos x)}$.

1.11. а) $y=2x^5-\dfrac{1}{3x^3}+4\sqrt[4]{x}+3$; б) $y=\dfrac{x+3}{\sin 2x}$; в) $y=\sqrt{(\operatorname{tg}x)}$;

1.12. а) $y=5x^6-\dfrac{3}{2x^4}+8\sqrt[4]{x^3}-7$; б) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\operatorname{tg}x}$; в) $y=\left(e^x-2\right)^5$;

1.13. а) $y = 2x^3 - \dfrac{2}{x^6} + 3\sqrt[3]{x^2} + 5$; б) $y = \dfrac{4x}{\sin 3x}$; в) $y = \left(4 - \sqrt[5]{x}\right)^2$;

1.14. а) $y = 3x^4 - \dfrac{5}{3x^3} - 9\sqrt[3]{x^2} - 1$; б) $y = \dfrac{3x^5 + 7}{\operatorname{ctg} 2x}$; в) $y = (2 + \cos x)^3$;

1.15. а) $y = 4x^2 - \dfrac{3}{x^2} + 5\sqrt[5]{x^3} + 6$; б) $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1 - x^3}$; в) $y = \sqrt[3]{(3 + 4x)}$;

1.16. а) $y = 3x + \dfrac{4}{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} - 4$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\ln 3x}$; в) $y = \left(3x - e^x\right)^2$;

1.17. а) $y = 5x^2 - \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x} + 8$; б) $y = \dfrac{e^{4x}}{x^2 + 1}$; в) $y = \sqrt[5]{(1 + \cos x)}$.

1.18. а) $y = 4x^2 - \dfrac{5}{6x^6} + 10\sqrt[5]{x^4} - 2$; б) $y = \dfrac{e^{8x}}{\sqrt{x+1}}$; в) $y = (\sin x - 4)^3$;

1.19. а) $y = x^5 + \dfrac{1}{2x^2} - 4\sqrt{x} + 3$; б) $y = \dfrac{\arcsin 6x}{x + 3}$; в) $y = (\ln x)^5$;

1.20. а) $y = 3x^5 - \dfrac{2}{3x^3} + 6\sqrt[3]{x^2} - 9$; б) $y = \dfrac{x^2 + 4}{\cos 7x}$; в) $y = \left(5 - 2\sqrt{x}\right)^4$;

2. Найти производные второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ данных функций.

2.1 $y = x^2 \ln x$.

2.2. $y = \mathrm{e}^{4x}$.

2.3. $y = \mathrm{e}^{-3x}$.

2.4. $y = \mathrm{e}^{-5x}$.

2.5. $y = x^3 \mathrm{e}^x$.

2.12. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

2.13. $y = \mathrm{e}^{1-4x}$.

2.14. $y = x^2 \sin x$.

2.15. $y = \cos(2x - 5)$.

2.16. $y = \dfrac{3}{x^4}$.

2.6. $y = e^{3x-2}$.

2.7. $y = e^{-3x}$.

2.8. $y = \frac{x}{1+x}$.

2.9. $y = \frac{x-1}{x+2}$.

2.10. $y = \ln(2x+1)$.

2.11. $y = \ln(1-x^2)$.

2.17. $y = \frac{1}{x^3}$.

2.18. $y = \cos 2x$.

2.19. $y = \cos(3x+7)$.

2.20. $y = \frac{2}{x^3}$.

2.21. $y = \frac{6}{x^2}$.

2.22. $y = \cos(4x-1)$.

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой в точке с абсциссой x_0.

3.1 $y = \cos x$, $x_0 = \pi/2$.

3.2. $y = \sin x$, $x_0 = 0$.

3.3. $y = x^2 - 4$, $x_0 = 1$.

3.4. $y = \operatorname{arcctg} x$, $x_0 = 0$.

3.5. $y = \operatorname{ctg} x$, $x_0 = \pi/2$.

3.6. $y = x^2 - 9$, $x_0 = -2$.

3.7. $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

3.8. $y = x^2 - 2x$, $x_0 = -1$.

3.9. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

3.10. $y = x^2 - x$, $x_0 = 0$.

3.11. $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$.

3.12. $y = \cos x$, $x_0 = -\pi/2$.

3.13. $y = x^2 - 4$, $x_0 = -1$.

3.14. $y = \arcsin x$, $x_0 = 0$.

3.15. $y = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$.

3.16. $y = x^2 - 9$, $x_0 = 2$.

3.17. $y = \arccos x$, $x_0 = 0$.

3.18. $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$.

3.19. $y = x^2 - 2x$, $x_0 = 0$.

3.20. $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$.

3.21. $y = \sin x$, $x_0 = -\pi$.

3.22. $y = x^2 - 3x$, $x_0 = 0$.

16.5 Индивидуальное задание №5

Исследовать данную функцию и построить её график. Исследование предусматривает нахождение точек экстремума и интервалов возрастания и убывания функции, нахождение точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости графика.

1.1. $y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{9}{2}x + 2;$

1.2. $y = \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{21}{8}x - 1;$

1.3. $y = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4;$

1.4. $y = \frac{1}{21}x^3 + \frac{2}{7}x^2 - 3x + \frac{1}{3};$

1.5. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 6x - 1;$

1.6. $y = \frac{1}{15}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - 3x - 2;$

1.7. $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + 3x - 6;$

1.8. $y = \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{63}{10}x + 3;$

1.9. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 2;$

1.10. $y = \frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{2}x + 1;$

1.11. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 6x - 1;$

1.12. $y = \frac{1}{15}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - 3x - 2;$

1.13. $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + 3x - 6;$

1.14. $y = \frac{1}{10}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{63}{10}x + 3;$

1.15. $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-2;$

1.16. $y=\frac{1}{30}x^3-\frac{1}{10}x^2-\frac{3}{2}x+1;$

1.17. $y=-\frac{1}{6}x^3+\frac{9}{2}x+2;$

1.18. $y=\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{21}{8}x-1;$

1.19. $y=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{2}x^2-4;$

1.20. $y=\frac{1}{21}x^3+\frac{2}{7}x^2-3x+\frac{1}{3}.$

16.6 Индивидуальное задание №6

1. Найти указанные неопределённые интегралы.

1.1. а) $\int\left(3+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{x^4+3}$; в) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\cdot dx$;

1.2. а) $\int\left(7x-\frac{4}{x^5}+3\sqrt[6]{x}\right)dx$; б) $\frac{e^x dx}{e^x-3}$; в) $\int\frac{dx}{\cos^2(5x-4)}$;

1.3. а) $\int\left(8x^5+\frac{6}{x^3}-4\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{5-6x}}$; в) $\int\operatorname{tg}3x\,dx$;

1.4. а) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^3}+6\sqrt[5]{x^8}\right)dx$; б) $\int 7^{2x-3}dx$; в) $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$;

1.5. а) $\int\left(4x^3+\frac{2}{x^4}-\frac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{5x+9}$; в) $\int\sqrt[3]{7x-1}\,dx$;

1.6. а) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\cdot\sqrt[9]{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sin^2(4x+3)}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(6x+2)^2}}$;

1.7. а) $\int\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(8+3x)^5}$; в) $\int\sin^4 x\cdot\cos x\,dx$;

1.8. а) $\int\left(7x^6+\frac{3}{x^5}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; б) $\int e^{8x+1}dx$; в) $\int\frac{x\,dx}{2-4x^2}$;

1.9. а) $\int\left(2x^3-\frac{1}{x^4}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$; б) $\int\cos(2x-9)dx$; в) $\int\operatorname{ctg}5x\,dx$;

1.10. а) $\int\left(4x^2+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{\sqrt[6]{x}}\right)dx$; б) $\int e^{x^3}\cdot x^2dx$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$.

1.11. а) $\int\left(8x^5+\frac{6}{x^3}-4\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{5-6x}}$; в) $\int\operatorname{tg}3x\,dx$;

1.12. а) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^3}+6\sqrt[5]{x^8}\right)dx$; б) $\int 7^{2x-3}dx$; в) $\int\frac{\sin x\ dx}{\cos^3 x}$;

1.13. а) $\int\left(4x^3+\frac{2}{x^4}-\frac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{5x+9}$; в) $\int\sqrt[3]{7x-1}\ dx$;

1.14. а) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\cdot\sqrt[9]{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sin^2(4x+3)}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(6x+2)^2}}$;

1.15. а) $\int\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(8+3x)^5}$; в) $\int\sin^4 x\cdot\cos x\ dx$;

1.16. а) $\int\left(7x^6+\frac{3}{x^5}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; б) $\int e^{8x+1}dx$; в) $\int\frac{x\ dx}{2-4x^2}$;

1.17. а) $\int\left(2x^3-\frac{1}{x^4}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$; б) $\int\cos(2x-9)dx$; в) $\int\operatorname{ctg}5x\ dx$;

1.18. а) $\int\left(4x^2+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{\sqrt[6]{x}}\right)dx$; б) $\int e^{x^3}\cdot x^2dx$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$;

1.19. а) $\int\left(3+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{x^4+3}$; в) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\cdot dx$;

1.20. а) $\int\left(7x-\frac{4}{x^5}+3\sqrt[6]{x}\right)dx$; б) $\frac{e^x dx}{e^x-3}$; в) $\int\frac{dx}{\cos^2(5x-4)}$.

2. Вычислить с помощью определённого интеграла площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой. Сделать чертеж и заштриховать искомую фигуру.

2.1. $y=\frac{1}{3}(x+4)^2$; $y-x-10=0$.

2.2. $y=\frac{1}{3}(x-2)^2$; $y-x-4=0$.

2.3. $y=\frac{1}{3}(x+5)^2$; $y-x-11=0$.

2.4. $y=\frac{1}{3}(x-1)^2;\qquad y-x-5=0.$

2.5. $y=\frac{1}{3}(x+3)^2;\qquad y-x-9=0.$

2.6. $y=\frac{1}{3}(x-3)^2;\qquad y-x-3=0.$

2.7. $y=\frac{1}{3}(x-4)^2;\qquad y-x-2=0.$

2.8. $y=\frac{1}{3}(x+2)^2;\qquad y-x-8=0.$

2.9. $y=\frac{1}{3}(x-5)^2;\qquad y-x-1=0.$

2.10. $y=\frac{1}{3}(x+1)^2;\qquad y-x-7=0.$

2.11. $y=\frac{1}{3}(x+4)^2;\qquad y-x-10=0.$

2.12. $y=\frac{1}{3}(x-2)^2;\qquad y-x-4=0.$

2.13. $y=\frac{1}{3}(x+5)^2;\qquad y-x-11=0.$

2.14. $y=\frac{1}{3}(x-1)^2;\qquad y-x-5=0.$

2.15. $y=\frac{1}{3}(x+3)^2;\qquad y-x-9=0.$

2.16. $y=\frac{1}{3}(x-3)^2;\qquad y-x-3=0.$

2.17. $y=\frac{1}{3}(x-4)^2;\qquad y-x-2=0.$

2.18. $y=\frac{1}{3}(x+2)^2;\qquad y-x-8=0.$

2.19. $y=\frac{1}{3}(x-5)^2;\qquad y-x-1=0.$

2.20. $y=\frac{1}{3}(x+1)^2;\qquad y-x-7=0.$

16.7 Индивидуальное задание №7

Укажите номер правильного ответа.

1. Какого порядка есть дифференциальное уравнение

$$y''+(y')^3+Sin\,y=0$$

1) 1-го; 2) 2-го; 3) 3-го; 4) 4-го;

2. Частным решением уравнения $y'-y=0$ является функция:

1) $y=Cosx$; 2) $y=e^x$; 3) $y=x^2$; 4)

3. Какая из функций является частным решением уравнения

$$x^2\cdot y'=1\ ?$$

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=\frac{1}{x}+1$; 3) $y=-\frac{1}{x}$; 4) $y=x^2$;

4. Уравнение $y'+\frac{y}{x}=y^2$ является:

1)Линейным дифференциальным уравнением.

2)Уравнением с разделяющимися переменными.

3)Дифференциальным уравнением II порядка , допускающим понижение порядка.

4)Уравнением Бернулли.

5. Функция $y=10x^2$ является решением уравнения:

1) $y'-10x=0$; 2) $y'+10x=0$; 3) $y'+20x=0$;
4) $y'-20x=0$;

6. Решением уравнения $y'=y$, удовлетворяющим начальному условию $y(1)=1$, является функция …

1) $y=e^x$; 2) $y=e^{x+1}$; 3) $y=e^{x-1}$; 4) $y=e^{2x}$;

7. Вычислить общее решение уравнения $y'=2y$

1) $y = Ce^{-2x}$; 2) $y = e^{-2x} + C$; 3) $y = e^{2x} + C$;

4) $y = Ce^{2x}$;

8. Найти общее решение уравнения $y' = \sqrt{y}$

1) $y = 2\sqrt{x} + c$; 2) $y = \frac{1}{4}(x+c)^2$; 3) $y = \frac{1}{4}x^2 + c$;

4) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$;

9. Какое из следующих уравнений можно рассматривать, как уравнение Бернулли ?

1) $y' + xy = y^3$; 2) $y'' \cdot xy^2 = 1$; 3) $(y')^2 + y = x$;

4) $y' + xSiny = y$;

10. Какого порядка дифференциальное уравнение

$$y''' + (y')^2 + x = 0$$

1) 1-го; 2) 2-го; 3) 3-го; 4) 4-го;

11. Частным решение уравнения $y'' = x$ является функция…

1) $y = x^3 + 3$; 2) $y = \frac{6}{x}$; 3) $y = \sqrt{2}\,x^2$;

4) $y = \frac{1}{6}x^3 - 4$;

12. Уравнение $y' + \frac{y}{x} = 1$ является …

1) Линейным дифференциальным уравнением.

2) Уравнением с разделяющимися переменными.

3) Дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка.

4) Линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

13. Решением уравнения $y' = y$, удовлетворяющим начальному условию $y(0) = 1$, является функция…

1) $y = e^x$; 2) $y = x + 1$; 3) $y = e^{-x}$;

4) $y = x^2 + 1$;

14. Общее решение уравнения $y' = y^2$ имеет вид?

1) $y=-\frac{1}{x}+c$; 2) $y=\frac{1}{x}+c$; 3) $y=-\frac{1}{x+c}$; 4) $y=\frac{1}{x+c}$;

15. Общее решение уравнения $y'=\frac{y}{x}+1$ есть…

1) $y=x\ln|x|+C$; 2) $y=x+C$; 3) $y=\ln|x|\cdot C$;

4) $y=x\ln\ |Cx|$;

16.8 Индивидуальное задание №8

1. Найти: 1) частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial\, x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial\, y^2}$; 2) полный дифференциал функции dz; 3) смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; 4) градиент функции $z=f(x,y)$ в точке M_0.

1.1 $z=\ln(x-y^2)$, $M_0(1;0)$.

1.2. $z=\sin\frac{x}{y}$, $M_0(\pi;1)$.

1.3. $z=\frac{x+2y}{y}$, $M_0(-2;3)$.

1.4. $z=\mathrm{tg}(x^3y)$, $M_0(-1;\pi)$.

1.5. $z=\mathrm{e}^{x^2y-x}$, $M_0(2;0)$.

1.6. $z=(x+y)\arccos x$, $M_0\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

1.7. $z=\frac{y}{x^2-y}$, $M_0(-2;0)$.

1.8. $z=\mathrm{arctg}(xy)$, $M_0(-1;0)$.

1.9. $z=\ln(2x+y^2)$, $M_0(0;-1)$.

1.10. $z=\cos(x+y^3)$, $M_0(\pi/2;0)$.

1.11. $z=\sqrt{x^2+4y}$, $M_0(3;4)$.

1.12. $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$, $M_0(-4;-1)$.

1.13. $z=\mathrm{e}^{x^3+xy}$, $M_0(-1;1)$.

1.14. $z=x^2\arcsin y$, $M_0(2;0)$.

1.15. $z=\frac{x-y}{xy}$, $M_0(-2;1)$.

1.16. $z=\mathrm{ctg}(x^2+y)$, $M_0(0;\pi/2)$.

1.17. $z=\sqrt[3]{y-x^2}$, $M_0(0;8)$.

1.18. $z=x\mathrm{e}^{x-y}$, $M_0(-1;1)$.

1.19. $z=\frac{\sqrt{y}}{x-y}$, $M_0(0;1)$.

1.20. $z=\cos(x-2y)$, $M_0(-\pi;\pi/2)$.

2. Исследовать на экстремум заданную функцию двух переменных

$$z=f(x,y).$$

2.1. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y+2$.

2.2. $z=x^2+y^2-4y+2x+1$.

2.3. $z=x^2+y^2-2y+1$.

2.4. $z=x^2-y^2+2y+1$.

2.5. $z=x^2+y^2-xy-2x+y$.

26. $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x-4$.

2.7. $z=x^3+y^2-3x+2y$.

2.8. $z=x^3+y^3-3xy+1$.

2.9. $z=x^2+y^2-xy+2y$.

2.10. $z=x^2+y^2-xy+x+y$.

2.11. $z = x^3 + y^2 - 2xy + 6$.

2.12. $z = 6x^2 + 2y^2 + 2xy + 4y + 4$.

2.13. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 + y + 5$.

2.14. $z = x^2 + y^2 - xy + 9x - 6y + 20$.

2.15. $z = x^2 + 2y^2 + 2xy - 3x - 4y + 1$.

2.16. $z = xy - 2x^2 - 4y^2 + x + 12$.

2.17. $z = y^2 + 2xy - 4x - 2y - 3$.

2.18. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y + 2$.

2.19. $z = x^2 - 2y^2 - 2x + 6$.

2.20. $z = x^2 - 2y^2 + 3xy - x + 1$.

16.9 Индивидуальное задание №9

В задачах 1- 20 дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{x}^n}{\boldsymbol{b}^n(\boldsymbol{n}^2+1)}$. При заданных значениях $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ написать первые три члена ряда, найти интервал сходимости ряда и проверить сходимость ряда на концах интервала.

1. $\boldsymbol{a}=2,\ \boldsymbol{b}=3$.
2. $\boldsymbol{a}=3,\ \boldsymbol{b}=4$.
3. $\boldsymbol{a}=4,\ \boldsymbol{b}=5$.
4. $\boldsymbol{a}=5,\ \boldsymbol{b}=2$.
5. $\boldsymbol{a}=6,\ \boldsymbol{b}=7$.
6. $\boldsymbol{a}=3,\ \boldsymbol{b}=7$.
7. $\boldsymbol{a}=2,\ \boldsymbol{b}=5$.
8. $\boldsymbol{a}=3,\ \boldsymbol{b}=8$.
9. $\boldsymbol{a}=5,\ \boldsymbol{b}=3$.
10. $\boldsymbol{a}=7,\ \boldsymbol{b}=5$.
11. $\boldsymbol{a}=2,\ \boldsymbol{b}=3$.
12. $\boldsymbol{a}=3,\ \boldsymbol{b}=4$.
13. $\boldsymbol{a}=4,\ \boldsymbol{b}=5$.
14. $\boldsymbol{a}=5,\ \boldsymbol{b}=2$.
15. $\boldsymbol{a}=6,\ \boldsymbol{b}=7$.
16. $\boldsymbol{a}=3,\ \boldsymbol{b}=7$.
17. $\boldsymbol{a}=2,\ \boldsymbol{b}=5$.
18. $\boldsymbol{a}=3,\ \boldsymbol{b}=8$.
19. $\boldsymbol{a}=5,\ \boldsymbol{b}=3$.
20. $\boldsymbol{a}=7,\ \boldsymbol{b}=5$.

16.10 Индивидуальное задание №10

Задание 1.1. Выполнить действия с матрицами.

1. $\begin{pmatrix}3&4&1\\2&1&5\\6&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&5&3&4\\2&-1&0&1\\2&0&1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\5&0\\1&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&1&3&1\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & 7 & -5 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \\ 1 & -1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Задание 1.2. Найти $A + A^T$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -5 & -3\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & -9\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -4 & -5\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 9 & -1\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}6 & 0\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & -8\end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 7 & -1\end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

16.11 Индивидуальное задание №11

Задание 1. Вычислить определители.

1. $\begin{vmatrix}-3 & 0 & 0\\ 8 & 2 & 0\\ 1 & -7 & 1\end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 0 & 4 & 2\end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -7 & -9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 8 & 20 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & -0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

Задание 2. Найти базисный минор матрицы А.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 8 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

11. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

12. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16.12 Индивидуальное задание №12

Задание 1. Найти матрицу обратную к матрице A.

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

18. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$

20. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

Задание 2. Записать систему в матричной форме и решить её с помощью обратной матрицы.

1. $\begin{cases} -\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 5 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = 1 \\ \boldsymbol{x}_2 - 5\boldsymbol{x}_3 = -9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2\boldsymbol{x}_2 - 5\boldsymbol{x}_3 = 6 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = 11 \\ -\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = -7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = -6 \\ 3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = -9 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 = 13 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_3 = 5 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 = 10 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 = -1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 \quad + 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1 \\ \quad -2x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \quad = -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -11 \\ -2x_1 - x_2 \quad = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \quad = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad x_2 - 5x_3 = -9 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \quad -2x_2 - 5x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -6 \\ \quad 3x_2 - x_3 = -9 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$

14. $\begin{cases} -\boldsymbol{x}_1 \qquad + 2\boldsymbol{x}_3 = 5 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 = 10 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3 = -1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - 6\boldsymbol{x}_3 = -15 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = -2 \\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = 6 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = -1 \\ -\boldsymbol{x}_1 \qquad + 3\boldsymbol{x}_3 = 7 \\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = 6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 0 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 4\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 = -1 \\ \qquad -2\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_3 = -8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 \qquad = -5 \\ \boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = -1 \\ \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = 0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = -2 \\ \boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 - 4\boldsymbol{x}_3 = -11 \\ -2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \qquad = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} -\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 \qquad = 4 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = -3 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = -3 \end{cases}$

Задание 3. Решить систему по формулам Крамера, выполнить проверку.

1. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -3x_1 + x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -10 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 7 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 14 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = -17 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -10 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_4 = 7 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 13 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 0 \\ -x_1 - 4x_3 - x_4 = -2 \\ -x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 3 \\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -x_1+3x_2+5x_3+4x_4=-6 \\ x_2+2x_3-x_4=3 \\ x_1-x_2-2x_3+x_4=-1 \\ x_1-x_2+4x_3+x_4=-7 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+x_4=5 \\ -x_1+x_2+x_3+3x_4=4 \\ 4x_1+2x_2-2x_3=-6 \\ 3x_1-x_2+x_3+5x_4=-2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -x_1+x_2+2x_4=2 \\ 3x_1-2x_2+x_3+4x_4=4 \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=2 \\ 2x_1+x_3-x_4=-2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4=-8 \\ x_1-x_2+4x_3+3x_4=-4 \\ 3x_1+2x_2+x_4=-14 \\ -x_1+3x_2+x_3-x_4=5 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4=8 \\ x_1+2x_2-2x_4=5 \\ -x_1+x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4=4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+3x_4=7 \\ x_1-x_2+4x_4=-1 \\ 3x_1+7x_3+9x_4=10 \\ x_1+3x_4=1 \end{cases}$

Задание 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Найти общее и базисное решения (если они существуют).

1. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 9x_4 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 20x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 18x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 12x_4 = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 0 \\ 3x_2 - 7x_3 - 10x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 8x_4 = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 9x_4 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 20x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 7x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 18x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 12x_4 = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 0 \\ 3x_2 - 7x_3 - 10x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 8x_4 = 3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4 = 0 \\ 5\boldsymbol{x}_1 - 7\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 - 5\boldsymbol{x}_4 = 0 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - 3\boldsymbol{x}_4 = 3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 = 2 \\ 5\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_3 + 4\boldsymbol{x}_4 = 0 \\ \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 - 6\boldsymbol{x}_4 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4 = 2 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 + 4\boldsymbol{x}_4 = 0 \\ -2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3 + 6\boldsymbol{x}_4 = 0 \end{cases}$

16.13 Индивидуальное задание №13

Задание 1**.** Даны векторы $\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3, \vec{\boldsymbol{b}}$. Показать, что векторы $\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\vec{\boldsymbol{b}}$ в этом базисе.

1. $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \{1,2,5\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \{2,-3,4\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \{1,-1,-2\}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \{3,0,1\}$.

2. $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \{1,4,2\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \{5,-2,-3\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \{-2,-1,1\}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \{-3,2,4\}$.

3. $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \{2,1,5\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \{-4,3,5\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \{1,-1,-4\}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \{4,-1,-3\}$.

4. $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \{2,1,3\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \{3,-2,1\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \{1,-3,-4\}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \{7,0,7\}$.

5. $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \{1,3,5\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \{2,-1,-1\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \{4,-2,4\}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \{-7,3,-1\}$.

6. $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \{4,1,4\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \{-2,-1,1\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \{3,1,5\}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \{-3,-2,1\}$.

7. $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \{3,1,4\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \{-4,2,3\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \{2,-1,-2\}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \{7,-1,0\}$.

8. $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \{5,3,1\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \{-2,-1,2\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \{-2,1,4\}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \{3,0,1\}$.

9. $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \{3,1,6\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = \{-2,2,-3\}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \{-4,5,-1\}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = \{3,0,1\}$.

10. $\vec{a}_1 = \{5,1,2\}$, $\vec{a}_2 = \{3,4,-1\}$, $\vec{a}_3 = \{-4,2,1\}$, $\vec{b} = \{-3,5,4\}$.

11. $\vec{a}_1 = \{2,1,5\}$, $\vec{a}_2 = \{-4,3,5\}$, $\vec{a}_3 = \{1,-1,-4\}$, $\vec{b} = \{4,-1,-3\}$.

12. $\vec{a}_1 = \{2,1,3\}$, $\vec{a}_2 = \{3,-2,1\}$, $\vec{a}_3 = \{1,-3,-4\}$, $\vec{b} = \{7,0,7\}$.

13. $\vec{a}_1 = \{1,3,5\}$, $\vec{a}_2 = \{2,-1,-1\}$, $\vec{a}_3 = \{4,-2,4\}$, $\vec{b} = \{-7,3,-1\}$.

14. $\vec{a}_1 = \{4,1,4\}$, $\vec{a}_2 = \{-2,-1,1\}$, $\vec{a}_3 = \{3,1,5\}$, $\vec{b} = \{-3,-2,1\}$.

15. $\vec{a}_1 = \{3,1,4\}$, $\vec{a}_2 = \{-4,2,3\}$, $\vec{a}_3 = \{2,-1,-2\}$, $\vec{b} = \{7,-1,0\}$.

16. $\vec{a}_1 = \{5,3,1\}$, $\vec{a}_2 = \{-2,-1,2\}$, $\vec{a}_3 = \{-2,1,4\}$, $\vec{b} = \{3,0,1\}$.

17. $\vec{a}_1 = \{3,1,6\}$, $\vec{a}_2 = \{-2,2,-3\}$, $\vec{a}_3 = \{-4,5,-1\}$, $\vec{b} = \{3,0,1\}$.

18. $\vec{a}_1 = \{5,1,2\}$, $\vec{a}_2 = \{3,4,-1\}$, $\vec{a}_3 = \{-4,2,1\}$, $\vec{b} = \{-3,5,4\}$.

19. $\vec{a}_1 = \{3,1,6\}$, $\vec{a}_2 = \{-2,2,-3\}$, $\vec{a}_3 = \{-4,5,-1\}$, $\vec{b} = \{3,0,1\}$.

20. $\vec{a}_1 = \{1,3,5\}$, $\vec{a}_2 = \{2,-1,-1\}$, $\vec{a}_3 = \{4,-2,4\}$, $\vec{b} = \{-7,3,-1\}$.

Задание 2. Даны вершины треугольника ABC. Найти его площадь.

1. $A(1;-1;0)$, $B(3;5;-1)$, $C(4;3;1)$.
2. $A(3;-2;-1)$, $B(5;4;-2)$, $C(6;2;0)$.
3. $A(4;0;-5)$, $B(6;6;-6)$, $C(7;4;-4)$.
4. $A(0;0;1)$, $B(2;6;0)$, $C(3;4;2)$.
5. $A(-2;-2;-1)$, $B(0;4;-2)$, $C(1;2;0)$.
6. $A(1;-3;2)$, $B(3;3;1)$, $C(4;1;3)$.
7. $A(1;-5;0)$, $B(3;1;-1)$, $C(4;-1;1)$.
8. $A(3;-2;3)$, $B(5;4;2)$, $C(6;2;4)$.
9. $A(3;-1;1)$, $B(5;5;0)$, $C(6;3;2)$.

10. $A(0;-6;1), B(2;0;0), C(3;-2;2)$.

11. $A(-2;1;-1), B(0;7;-2), C(1;5;0)$.

12. $A(-2;3;4), B(2;4;-1), C(3;2;1)$.

13. $A(1;-3;0), B(3;3;-1), C(4;1;1)$.

14. $A(-1;-2;-1), B(1;4;-2), C(2;2;0)$.

15. $A(2;0;1), B(4;6;0), C(5;4;2)$.

16. $A(0;0;-6), B(2;6;-7), C(3;4;-5)$.

17. $A(-2;3;4), B(0;9;3), C(1;7;5)$.

18. $A(3;1;2), B(5;7;1), C(6;5;3)$.

19. $A(1;-1;4), B(3;5;3), C(4;3;5)$.

20. $A(3;1;6), B(5;7;5), C(6;5;7)$.

Задание 3.

1. Найти длину вектора $\bar{в}$ (3, -4, 1).

2. Вычислить $(\bar{a} \cdot \bar{в})$, если $\bar{a}$ (2, 0, -1) , $\bar{в}$ (3, 2, 4) .

3. Чему будет равно скалярное произведение векторов, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{в}| = 1$, а угол между ними 30^0.

4. Раскрыть скобки в выражении $(2\bar{i} - \bar{j}) \cdot \bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k}) \cdot \bar{k} + (\bar{i} - 2\bar{k})^2$.

5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ (1, 0, 4) и $\bar{в}$ (0, -1, 1).

6. Образуют ли векторы $\bar{a}, \bar{в}, \bar{c}$ базис трехмерного пространства, если $\bar{a}$ (2, 5, 1) , $\bar{в}$ (-5, 1, -2), $\bar{c}$ (-1, -2, 5).

7. Раскрыть скобки в выражении $(4\bar{i} - 3\bar{j}) \times (2\bar{i} + 6\bar{j}) + \bar{k}$.

8. Вычислить $\bar{c} = 2\bar{в} - 3\bar{a}$, если $\bar{a} = 3i - k$; $\bar{в} = 2i + j - k$.

9. Найти модуль векторного произведения векторов
$\overline{a}$ (0, 3, 0) и $\overline{в}$ (3, 0, 0).

10. Найти объём тетраэдра построенного на векторах
$\overline{a}$ (1, 3, 0) , $\overline{в}$ (-3, 0, 1) и $\overline{c}$ (0, 1, -2).

11. Раскрыть скобки в выражении $(\bar{i}-3\bar{k})\times(\bar{i}-5\bar{j})+(\bar{i}+\bar{k})$.

12. Найти угол между $\overline{a}$ и $\overline{в}$, если $\overline{a}$ (-1, 0, 1), $\overline{в}$ (2, -2, 2).

13. Разложить $\overline{c}$ (-5, 2, 1) по векторам $\overline{a}$ (3, 0, -1) и $\overline{в}$ (2,1,-1).

14. Найти проекцию вектора $\bar{r}=2i-3j+6k$ на ось Oz.

15. Вычислить модуль вектора $\bar{c}=2i-j+5k$.

16. Вычислить: $3i\cdot(j\times j)+j\cdot(k\times i)-2k(i\times j)$.

17. Образуют ли векторы $\overline{a},\overline{в},\overline{c}$ базис трехмерного пространства, если $\overline{a}$ (2, 3, 4) , $\overline{в}$ (-4, 2, -3), $\overline{c}$ (3, -2, 4).

18. Найти объём тетраэдра построенного на векторах $\overline{a}$ (0, 1, 0) $\overline{в}$ (-2, 0, 0) и $\overline{c}$ (0, 0, 3).

19. Найти модуль векторного произведения векторов, $\overline{a}\times\overline{в}$, если $\overline{a}$ (0, 0, 1) и $\overline{в}$ (1, 0, 0).

20. Раскрыть скобки в выражении: $(3\bar{i}-5\bar{j})\cdot\bar{k}+(\bar{i}-\bar{j})^2+\bar{i}\cdot(2\bar{j}+\bar{k})$.

16.14 Индивидуальное задание №14

Задание 1. Заданы вершины треугольника ABC. Найти:
a) уравнения стороны BC треугольника;
b) уравнение высоты AH;
c) уравнение медианы AM.

1. A $(-1,8)$, B $(4,-4)$, C $(6,2)$.
2. A $(0,-5)$, B $(-3,8)$, C $(-6,2)$.
3. A $(-4,1)$, B $(6,-9)$, C $(10,-1)$.
4. A $(7,-3)$, B $(4,1)$, C $(-3,-1)$.

5. $A\ (4,10), B(-4,2), C\ (6,-4)$.
6. $A\ (-6,2), B\ (3,-1), C\ (11,3)$.
7. $A\ (5,-5), B\ (-7,-2), C\ (-7,4)$.
8. $A\ (-5,4), B\ (-1,-4), C\ (9,6)$.
9. $A\ (-3,1), B\ (10,-2), C\ (4,-5)$.
10. $A\ (8,1), B\ (-3,-1), C\ (-4,-5)$.
11. $A\ (4,0), B\ (-2,-6), C\ (-3,5)$.
12. $A\ (-4,6), B\ (-7,-2), C\ (3,-8)$.
13. $A\ (3,2), B\ (0,2), C\ (-7,-4)$.
14. $A\ (-8,-4), B\ (7,0), C\ (1,4)$.
15. $A\ (-2,4), B\ (1,-3), C\ (0,7)$.
16. $A\ (1,4), B\ (-5,1), C\ (8,-2)$.
17. $A\ (10,7), B\ (-2,4), C\ (3,1)$.
18. $A\ (0,4), B\ (2,5), C\ (-3,1)$.
19. $A\ (6,8), B\ (-3,-2), C\ (14,4)$.
20. $A\ (11,-3), B\ (1,7), C\ (-3,-1)$.

Задание 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A, параллельно заданной прямой.

1. $A\ (1,3),\ y-2x+5=0$.
2. $A\ (0,-4),\ 4y-2x+1=0$.
3. $A\ (5,1),\ y+2x-13=0$.
4. $A\ (0,-4), 2y-2x+4=0$.
5. $A\ (-8,7),\ y+7x-5=0$.
6. $A\ (1,4),\ 3y+2x+8=0$.
7. $A\ (-6,3),\ y+x+1=0$.
8. $A\ (9,0),\ 5y-4x-3=0$.
9. $A\ (-1,-2),\ y+2x-6=0$.
10. $A\ (0,-5),\ 6y-4x=0$.
11. $A\ (-2,7),\ y+9x+2=0$.
12. $A\ (9,0),\ 7y-5x+6=0$.
13. $A\ (1,-5),\ y+2x=0$.
14. $A\ (-2,-1),\ 8y-3x+10=0$.
15. $A\ (9,4),\ y+12x+2=0$.
16. $A\ (1,1),\ 9y-5x-5=0$.
17. $A\ (0,-2), 3y-2x=0$.
18. $A\ (1,-5),\ y-x+15=0$.
19. $A\ (-6,7),\ 6y-6x-7=0$.
20. $A\ (4,-6),\ y+12x-8=0$.

Задание 3. Найти расстояние от точки A до прямой BC.

1. A $(3,8)$, B $(4,-4)$, C $(8,2)$.
2. A $(7,7)$, B $(-3,-3)$, C $(5,-7)$.
3. A $(-3,3)$, B $(1,-6)$, C $(3,4)$.
4. A $(2,6)$, B $(-4,2)$, C $(8,-6)$.
5. A $(5,7)$, B $(-5,2)$, C $(0,-4)$.
6. A $(-1,8)$, B $(4,-4)$, C $(6,2)$.
7. A $(0,-5)$, B $(-3,8)$, C $(-6,2)$.
8. A $(-4,1)$, B $(6,-9)$, C $(10,-1)$.
9. A $(7,-3)$, B $(4,1)$, C $(-3,-1)$.
10. A $(4,10)$, B$(-4,2)$, C $(6,-4)$.
11. A $(-6,2)$, B $(3,-1)$, C $(11,3)$.
12. A $(5,-5)$, B $(-7,-2)$, C $(-7,4)$.
13. A $(-5,4)$, B $(-1,-4)$, C $(9,6)$.
14. A $(-3,1)$, B $(10,-2)$, C $(4,-5)$.
15. A $(8,1)$, B $(-3,-1)$, C $(-4,-5)$.
16. A $(4,0)$, B $(-2,-6)$, C $(-3,5)$.
17. A $(-4,6)$, B $(-7,-2)$, C $(3,-8)$.
18. A $(3,2)$, B $(0,2)$, C $(-7,-4)$.
19. A $(-8,-4)$, B $(7,0)$, C $(1,4)$.
20. A $(-2,4)$, B $(1,-3)$, C $(0,7)$.

Задание 4. Найти угол между двумя прямыми.

1. $3y+3x+6=0$, $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$.

2. $-3y+2x+3=0$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$.

3. $y-x+9=0$, $\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=1$.

4. $y+4x+5=0$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$.

5. $2y-2x+8=0$, $\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1$.

6. $4y+3x-2=0$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

7. $y-2x-4=0$, $\frac{x}{1}-\frac{y}{6}=1$.

8. $y+3x-7=0$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{8}=1$.

9. $y+x+6=0$, $\frac{x}{7}-\frac{y}{7}=1$.

10. $-y+2x-1=0, \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1.$

11. $4y-2x+1=0, \frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1.$

12. $-2y+x=0, \frac{x}{9}+\frac{y}{1}=1.$

13. $2y-2x+4=0, \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1.$

14. $4y-x+5=0, \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1.$

15. $3y+2x+8=0, \frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1.$

16. $-4y+4x-6=0, \frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1.$

17. $5y-4x-3=0, \frac{x}{9}-\frac{y}{3}=1.$

18. $y+2x-10=0, \frac{x}{3}+\frac{y}{9}=1.$

19. $6y-4x=0, \frac{x}{2}-\frac{y}{8}=1.$

20. $y-3x-1=0, \frac{x}{6}+\frac{y}{12}=1.$

Задание 5. Определить вид кривой II порядка, используя метод выделения полных квадратов.

1. $2x^2- y^2+4x-6y-2=0.$

2. $x^2+y^2+2x+4y+4=0.$

3. $3x^2- 6y^2+9x-6y=0.$

4. $4x^2+4y^2+8x-6y+10=0.$

5. $x^2- y^2-5x+y-8=0.$

6. $x^2+5y^2-10x=0.$

7. $2x^2- y^2+6y=0.$

8. $5x^2+5y^2-10=0.$

9. $2x^2+4x-6y+8=0.$

10. $y^2+4x-6y-2=0.$

11. $x^2 - y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.

12. $2x^2 - 2y^2 - 8x + 6y = 0$.

13. $4x^2 + 12x + y - 5 = 0$.

14. $y^2 - 3x - 3y + 6 = 0$.

15. $2x^2 + 2y^2 + 8x + 8y = 0$.

16. $3x^2 - 3y^2 - 12 = 0$.

17. $5x^2 + 5y^2 + 10x - 15y = 0$.

18. $4y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$.

19. $2x^2 + 4x - 6y + 10 = 0$.

20. $2x^2 - 6y - 2 = 0$.

Задание 6. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок ОА, где точка О —начало координат.

1. A $(2,6)$.
2. A $(0,4)$.
3. A $(8,8)$.
4. A $(-2,-4)$.
5. A $(-8,6)$.
6. A $(4,4)$.
7. A $(-6,2)$.
8. A $(8,0)$.
9. A $(-2,-2)$.
10. A $(0,-4)$.
11. A $(12,6)$.
12. A $(10,0)$.
13. A $(8,-6)$.
14. A $(-2,-10)$.
15. A $(4,4)$.
16. A $(16,12)$.
17. A $(0,-2)$.
18. A $(10,10)$.
19. A $(-6,4)$.
20. A $(14,-6)$.

Задание 7. Составить каноническое уравнение эллипса по исходным данным (малая полуось b, большая полуось a, координаты фокуса F, эксцентриситет ε).

1. $a = 13, \varepsilon = {}^{12}/_{13}$.
2. $b = 15, F(-10,0)$.
3. $a = 7, \varepsilon = \sqrt{55}/7$.
4. $a = 11, \varepsilon = \sqrt{57}/11$.
5. $b = \sqrt{15}, \varepsilon = \sqrt{10}/25$.
6. $a = 4, F(3,0)$.
7. $b = 2\sqrt{10}, F(-11,0)$.
8. $b = 4, F(9,0)$.
9. $a = 5, \varepsilon = 3/5$.
10. $a = 12, \varepsilon = \sqrt{22}/6$.
11. $b = 2, \varepsilon = 5\sqrt{29}/29$.
12. $a = 6, F(-4,0)$.
13. $b = 3, F(7,0)$.
14. $a = 11, \varepsilon = 9/11$.
15. $b = 5, \varepsilon = 12/13$.
16. $a = 11, \varepsilon = 10/11$.
17. $a = 9, F(7,0)$.
18. $b = 6, F(12,0)$.
19. $a = 9, \varepsilon = 2/3$.
20. b=5, F(-10,0).

Задание 8. Построить параболу, если задана ее директриса.

1. $y = -3$.
2. $x = 12$.
3. $y = 4$.
4. $x = -6$.
5. $y = 2$.
6. $x = -7$.
7. $y = 1$.
8. $x = 0{,}5$.
9. $y = -8$.
10. $x = 6$.
11. $y = -14$.
12. $x = 1$.
13. $y = 10$.
14. $x = -5$.

15. $y = 9$.
16. $x = -3$.
17. $y = 12$.
18. $x = 4$.
19. $y = -6$.
20. $y = 8$.

Задание 9. Вычислить эксцентриситет ε и определить фокусное расстояние 2с гиперболы.

1. $4x^2 - 5y^2 = 20$.
2. $13x^2 - 15y^2 = 195$.
3. $3x^2 - 25y^2 = 75$.
4. $7x^2 - 11y^2 = 77$.
5. $x^2 - 10y^2 = 90$.
6. $4x^2 - 12y^2 = 48$.
7. $x^2 - 4y^2 = 12$.
8. $7x^2 - 9y^2 = 63$.
9. $3x^2 - 16y^2 = 48$.
10. $10x^2 - 20y^2 = 200$.
11. $5x^2 - 9y^2 = 45$.
12. $3x^2 - 7x^2 = 21$.
13. $5x^2 - 11y^2 = 55$.
14. $2x^2 - 9y^2 = 18$.
15. $6x^2 - 7y^2 = 42$.
16. $3x^2 - 5y^2 = 30$.

17. $10x^2 - 13y^2 = 130.$

18. $4x^2 - 5y^2 = 80.$

19. $x^2 - 16y^2 = 64.$

20. $3x^2 - 4y^2 = 12.$

16.15 Индивидуальное задание №15

Задание 1. Решить задачи 1- 20.

1. Партия из 20 изделий содержит четыре бракованных. Найдите вероятность того, что среди 5 наудачу выбранных изделий окажется 3 бракованных.
2. Для успешной сдачи экзамена необходимо ответить хотя бы на один из двух предложенных теоретических вопросов и решить задачу. Вероятность того, что студент правильно ответит на теоретический вопрос, равна 0,8, решит задачу 0,95. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен.
3. В городе 4 коммерческих банка, оценки надёжности которых равны 0,85, 0,8, 0,95, 0,9 соответственно. Найдите вероятность того, что в течение некоторого промежутка времени обанкротится хотя бы один.
4. Пакеты акций, имеющихся на рынке ценных бумаг, могут дать доход владельцу с вероятностью 0,6 (для каждого пакета). Сколько пакетов акций различных фирм нужно приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,98, можно было ожидать доход хотя бы по одному пакету акций?
5. На ферме имеется три транспортёра. Вероятности того, что они выдержат гарантийный срок службы, соответственно, равны 0,77; 0,92; 0,8. Найдите вероятность того, что наудачу выбранный транспортёр выдержит гарантийный срок.
6. У сборщика имеется 18 деталей, изготовленных первым заводом и 22 детали, изготовленные вторым заводом. Вероятность того, что деталь первого завода стандартная, равна 0,92; для второго завода эта вероятность 0,8. Наудачу взятая деталь оказалась стандартной. Каким заводом вероятнее всего изготовлена эта деталь?
7. Вероятность того, что клиент банка вернёт заём в период экономического роста, равна 0,96, а в период экономического кризиса 0,82. Предположим, что вероятность того, что начнётся период экономического роста, равна 0,68. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернёт полученный кредит?
8. В одной урне 2 белых и 8 чёрных шаров, а в другой – 3 белых и 9 чёрных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и

опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают три шара. Найдите вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны белые.

9. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность второго автомата вдвое больше производительности первого. Первый автомат производит в среднем 85% деталей отличного качества. Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, равна 0,8. Сколько деталей отличного качества в среднем производит второй автомат?

10. Однотипные приборы выпускаются 3 заводами в отношении 3:4:5, причём вероятности брака для этих заводов соответственно равны 0,04, 0,05, 0,03. Приобретённый прибор оказался бракованным. Какова вероятность того, что он изготовлен 3-м заводом?

11. При установившемся технологическом процессе автомат производит 0,75 числа деталей первого сорта и 0,25 – второго. Установите, что является более вероятным – получить 3 первосортных детали среди 5 наудачу отобранных или 4 первосортных среди 6 наудачу отобранных.

12. Среди изделий, произведенных на станке-автомате, в среднем бывает 90% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 5 наудачу выбранных изделий будет не менее 4 первого сорта?

13. При данном технологическом процессе 80% всей продукции оказывается продукцией высшего сорта. Определите наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 200 изделий и его вероятность.

14. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,05. Сколько деталей должно быть в партии, чтобы наивероятнейшее число нестандартных деталей в ней было равно 50?

15. По данным выборочного обследования на 100 домохозяйств приходится 56 легковых автомобилей. Найдите вероятность того, что 500 домохозяйств имеет 300 легковых автомобилей.

16. Всхожесть семян некоторого растения составляет 90%. Какова вероятность того, что из 100 посеянных семян взойдет не менее 75 и не более 95?

17. На склад поступает продукция с 3 фабрик, доля которых составляет соответственно 20%, 45%, 35%. В продукции первой фабрики 70% изделий высшего сорта, второй – 60%, третьей – 80%. Найдите вероятность того, что среди 300 наудачу взятых изделий число изделий высшего сорта заключено между 180 и 220.

18. В результате проверки качества приготовленного для посева зерна было установлено, что 80% семян всхожие. Определите вероятность того, что среди отобранных и высаженных 100 зерен прорастет не менее 75.

19. Вероятность появления события в каждом из 500 независимых испытаний равна 0,85. Найдите вероятность того, что относительная

частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

20. При обработке некоторой детали наблюдается в среднем 6% нарушений норм её установленных размеров. Установите необходимое количество деталей, подлежащих обработке, чтобы ожидать с вероятностью 0,95 отклонение частоты появления неточных деталей от вероятности этого события не более, чем на 0,03.

Задание 2. В задачах 1 – 20 найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, постройте график функции распределения вероятностей этой случайной величины.

1.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

2.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

3.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

4.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

5.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

6.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

7.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

8.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

9.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

10.

x_i	-3	3	5	10

p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

11.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

12.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

13.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

14.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

15.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

16.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

17.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

18.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

19.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

20.

x_i	-3	3	5	10
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

Глоссарий

- **Алгебраическое дополнение** A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n-го порядка – минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
- **Базис n-мерного линейного пространства** – совокупность n линейно независимых векторов этого пространства.
- **Базисное решение** системы линейных уравнений – решение, в котором все свободные переменные равны нулю.
- **Базисные переменные** в системе линейных уравнений – то же, что **основные переменные** в системе линейных уравнений.
- **Вектор** – направленный отрезок $\overline{AB}$ с началом в точке *A* и концом в точке *B,* которой можно перемещать параллельно самому себе.
- **Вектор нулевой** – вектор, начало и конец которого совпадают.
- **Векторное пространство** – множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения векторов на число, удовлетворяющие некоторому набору свойств (аксиом).
- **Векторы коллинеарные** – векторы, лежащие на одной прямой или параллельных прямых.
- **Векторы противоположные** – векторы такие, что они: 1) лежат на одной прямой или параллельных прямых; 2) имеют равные длины; 3) направлены в противоположные стороны.
- **Векторы равные** – векторы такие, что они: 1) лежат на одной прямой или параллельных прямых; 2) имеют равные длины; 3) направлены в одну сторону.
- **Вероятность** - это отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов при равенстве событийной ценности (веса) исходов.
- **Внутригрупповая дисперсия** - средняя арифметическая групповых дисперсий, взвешенная по объемам групп.
- **Возрастающая на промежутке функция** – такая функция $y=f(x)$, что для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X, x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.
- **Выборка** - совокупность случайно отобранных из изучаемой совокупности объектов (генеральной выборки).
- **Выборочное среднее** - частное от деления суммы значений всех элементов выборки на число элементов выборки.
- **Выпуклая вверх функция** – функция, для которой любой отрезок между двумя любыми точками графика функции в векторном пространстве лежит выше соответствующей дуги графика.

- **Выпуклая вниз функция** – функция, для которой любой отрезок между двумя любыми точками графика функции в векторном пространстве лежит ниже соответствующей дуги графика.

где $a_{ij}, b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n)$ – произвольные числа.

- **Гипербола** - геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2a.
- **Гистограмма** - ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы длиною h, а высоты n.
- **Главная диагональ** квадратной матрицы – совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.
- **Групповая дисперсия** - дисперсия значений признака, принадлежащих группе, относительно групповой средней.
- **Групповая средняя** - среднее арифметическое значений признака, принадлежащих группе.
- **Двумерная случайная величина** - величина, имеющая два аргумента.
- **Дискретная случайная величина** - величина, принимающая отдельные значения с определенными вероятностями.
- **Дисперсия случайной величины** - математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.
- **Дифференциал функции *y=f(x)* в точке *x*** – главная часть приращения функции: $dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx$.
- **Дифференциал функции** y = f(x) линейная часть приращения функции, равен произведению ее производной на приращение независимой переменной x (аргумента).
- **Дифференциалом dx независимой переменной x** понимают любое, не зависящее от x, число, поэтому, по определению, дифференциалом независимой переменной x называют ее приращение Dx, т.е. полагают, что dx=Dx.
- **Дифференциальное уравнение – уравнение**, в которое входят производные функции, и может входить сама функция, независимая переменная и параметры.
- **Дифференциальное уравнение** – уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные.
- **Дифференциальное уравнение второго порядка** – уравнение вида: $F(x; y; y'; y'') = 0 \quad или \quad y'' = f(x; y; y')$.

- **Дифференциальное уравнение первого порядка** – уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производную: $F(x;y;y')=0 \quad или \quad y'=f(x;y)$.
- **Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными** – уравнение вида: $P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx+P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy=0$.
- **Дифференциальные уравнениями с разделенными переменными** - уравнения, в которых выражение, зависящее от y, входит только в левую часть, а выражение, зависящее от x – только в правую часть.
- **Дифференцирование функции** – это процесс нахождения производной.
- **Дифференцируемая (в точке) функция – это функция**, у которой существует дифференциал (в данной **точке**).
- **Дифференцируемая на некотором множестве функция** – это функция, дифференцируемая в каждой точке данного множества.
- **Длина вектора** – длина отрезка, изображающего вектор.
- **Доверительный интервал** - интервал, который покрывает неизвестный параметр x с заданной надежностью (вероятностью) p. Доверительный интервал обладает тем свойством, что, во-первых, его границы вычисляются исключительно по выборке (и, следовательно, не зависят от неизвестного параметра), и, во-вторых, он накрывает неизвестный параметр с вероятностью p
- **Достоверное событие** - событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.
- **Закон распределения случайной величины** - соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.
- **Интеграл** – это сумма бесконечно большого количества бесконечно малых слагаемых.
- **Интеграл дифференциального уравнения** – это решение дифференциального уравнения, которое имеет неявный вид.
- **Интегральная кривая дифференциального уравнения** – график всякого решения дифференциального уравнения.
- **Интегрирование функции** – это восстановление функции по её производной (обратное действие по отношению к дифференцированию).
- **Интервальная оценка** - оценка, которая определяется концами интервала.
- **Касательной к графику функции** дифференцируемой в точке называется прямая, проходящая через точку и имеющая угловой коэффициент.
- **Конец вектора** $\overline{AB}$ – точка B.
- **Конкурирующая гипотеза** - гипотеза противоречащая основной.

- **Координаты вектора** – упорядоченная пара (для вектора на плоскости) или тройка (для вектора в трехмерном пространстве) чисел, являющихся разностью соответствующих координат конца и начала вектора.
- **Координаты точки** – упорядоченная пара (для вектора на плоскости) или тройка (для вектора в трехмерном пространстве) чисел, однозначно определяющая положение точки.
- **Корреляционная зависимость** - зависимость, при которой при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой.
- **Корреляционный момент** - характеристика связи между двумя случайными величинами.
- **Коэффициент вариации** - выраженное в процентах отношение выборочного среднеквадратического отклонения к выборочной средней.
- **Коэффициент корреляции** - отношение ковариации к произведению среднеквадратических отклонений двух случайных величин.
- **Коэффициенты при неизвестных** в системе линейных уравнений – числа a_{ij}.
- **Кривые второго порядка** – алгебраические линии, которые задаются уравнением второй степени: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
- **Критерий Стьюдента** - направлен на оценку различий величин средних и двух выборок X и Y, которые распределены по нормальному закону. Одним из главных достоинств критерия является широта его применения. Он может быть использован для сопоставления средних у связных и несвязных выборок, причем выборки могут быть не равны по величине.
- **Критическая область** - совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.
- **Линейная комбинация** нескольких векторов – сумма произведений этих векторов на произвольные действительные числа.
- **Линейное дифференциальное уравнение первого порядка** – Уравнение вида: $y' + p(x) \cdot y = g(x)$.
- **Линейное пространство** – то же, что и **векторное пространство**.
- **Линией** называется геометрическое место точек, обладающее определёнными свойствами.
- **Линия** называется **алгебраической**, если её уравнение F(x; y) = 0, где F(x; y) – многочлен.
- **Математическое ожидание** - число, относительно которого стабилизируется среднее арифметическое возможных значений случайной величины при достаточно большом количестве испытаний.

- **Матрица диагональная** – квадратная матрица, все недиагональные элементы которой равны нулю.
- **Матрица единичная** – квадратная матрица *E*, недиагональные элементы которой равны нулю, а диагональные – единице.
- **Матрица квадратная** – матрица, число строк которой совпадает с числом столбцов.
- **Матрица квадратная** n-го порядка – матрица размера $n \times n$.
- **Матрица невырожденная** – квадратная матрица, определитель которой не равен нулю.
- **Матрица** размера $m \times n$ – прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.
- **Матрица системы** линейных уравнений – матрица из коэффициентов при неизвестных.
- **Матрица, обратная** по отношению к квадратной матрице A – матрица A^{-1} того же размера, что и матрица A и такая, что при умножении этой матрицы на матрицу A как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.
- **Матрица, присоединенная** к квадратной матрице *A* – квадратная матрица того же порядка, элементы которой являются алгебраическими дополнениями к матрице A', транспонированной к матрице *A*.
- **Матрица-столбец** – матрица, содержащая только один столбец, то есть матрица размера $m \times 1$.
- **Матрица-столбец переменных** в системе линейных уравнений – матрица
- **Матрица-столбец свободных коэффициентов** в системе линейных уравнений – матрица $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$.
- **Матрица-строка** – матрица, содержащая только одну строку, то есть матрица размера $1 \times n$.
- **Матрицы равные** – две матрицы одинакового размера, все соответствующие элементы которых равны.
- **Матрицы согласованные** – две матрицы такие, что число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй.
- **Межгрупповая дисперсия** - дисперсия групповых средних относительно общей средней.
- **Метод наименьших квадратов** - Задача заключается в нахождении коэффициентов функциональной зависимости исследуемых переменных величин, при которых обеспечивается минимальная дисперсия разницы выборочных значений и функции, которой аппроксимируют

стохастическую зависимость исследуемых переменных. То есть, при данных a и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей.

- **Минор** M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n-го порядка – определитель матрицы $(n-1)$- го порядка, полученной из исходной матрицы вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.
- **Минор** k**-го порядка** матрицы A– определитель квадратной подматрицы k -го порядка.
- **Мода** - варианта ряда, которая имеет наибольшую частоту.
- **Модуль вектора** – то же, что и **длина вектора.**
- **Моменты случайных величин** - характеристики случайных величин, определяющие математическое ожидание k-й степени отклонения случайной величины.
- **Направляющим вектором** прямой называется вектор, параллельный этой прямой.
- **Начало вектора** $\overline{AB}$ – точка A.
- **Неопределенный интеграл** для **функции** – это совокупность всех первообразных данной функции.
- **Неопределенный интеграл от функции *f(x)*** – совокупность всех первообразных функции *f(x)*. $\int f(x)dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x)$.
- **Непрерывная случайная величина** - величина, принимающая значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга.
- **Несмещенная оценка** - оценка x, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру x.
- **Несобственные интегралы** – определенные интегралы от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.
- **Нулевая гипотеза** - основная выдвинутая гипотеза.
- **Общая дисперсия** - дисперсия значений признака всей совокупности относительно общей средней.
- **Общее решение дифференциального уравнения первого порядка** - функция $y=\varphi(x;c)$, которая является решением ДУ при каждом *c* *(c=const),* и для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ константа *c* определяется однозначно.
- **ОДУ первого порядка** - уравнение $y' = f(x;y)$, если *f(x;y)* – однород. функция нулевого порядка, т.е. $f(\lambda x;\lambda y) = f(x;y)$.
- **Окружность** – геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки, называемой центром.

- **Определенный интеграл для функции** – это функция, производная от которой дает подынтегральную функцию.
- **Определенный интеграл от *f(x)* на [*a;b*]** – число *I*, как предел интегральной суммы, не зависящий ни от способа разбиения отрезка [*a;b*] на частичные отрезки, ни от выбора в них точек ξ_i :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,\ \ \lambda = \max \Delta x_i, i = \overline{1,n}$$

- **Определитель** квадратной матрицы – число, по определенному закону сопоставляемое этой матрице.
- **Основные переменные** в системе линейных уравнений – r переменных (r – ранг матрицы системы), определитель матрицы коэффициентов при которых отличен от нуля.
- **Парабола** – геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки, называемой фокусом и данной прямой, называемой директрисой.
- **Первообразная функции *f(x)* на интервале *(a;b)*** – функция *F(x)*: $\forall x \in (a;b) \Rightarrow F'(x) = f(x)$.
- **Плотность распределения вероятностей** - вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение на указанном интервале.
- **Повторная выборка** - выборка, при которой отобранный объект возвращается после проведения обследования обратно в генеральную совокупность.
- **Под углом между двумя прямыми** понимают наименьший угол, отсчитываемый против часовой стрелки, на который вторая прямая повёрнута относительно первой .
- **Под углом между плоскостями** понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.
- **Подматрица** матрица A – матрица, полученная из матрицы A вычеркиванием некоторых строк и/или столбцов.
- **Полигон частот** - ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x1, n1).
- **Порядок дифференциального уравнения** – порядок наивысшей производной, входящей в дифференциальное уравнение.
- **Предел функции *f(x)* в точке x_o, т.е.** $\lim_{x\to x_0} f(x)$ число *A,* если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, что при всех x: $|x-x_o| < \delta$, $x \neq x_o$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

- **Предел числовой последовательности x_n** – число a, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется $|x_n - a| < ε$. Записывают $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
- **Произведение (согласованных) матриц** A размера $m\times n$ и B размера $n\times l$ – матрица размера $m\times l$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца B.
- **Произведение вектора** $\bar{a}$ **на число** λ – вектор, имеющий длину $|\lambda|\,|\bar{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $|\bar{a}|$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$.
- **Произведение матрицы** A **на число** λ – матрица, каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на число λ.
- **Производная функции $y=f(x)$ в точке x** – предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- **Производная функция** – понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке.
- **Производящая функция** - функция, определяющая вероятность наступления события при различных вероятностях появления в каждом испытании.
- **Прямоугольная система координат на плоскости –** две взаимно перпендикулярных оси, пересекающиеся в точке – начале координат, а также масштаб.
- **Разложение** n**-мерного вектора** $\bar{x}$ **по базису** $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ **-** представление вектора $\bar{x}$ в виде
- **Размах варьирования *R*** - разность между наибольшей и наименьшей вариантой.
- **Размерность линейного пространства** – максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.
- **Разность** $\bar{a}-\bar{b}$ **векторов** $\bar{a}$ и $\bar{b}$**,** начала которых совпадают – вектор, начало которого совпадает с концом вектора $\bar{b}$, а конец – с концом вектора $\bar{a}$.
- **Разность матриц** A и B одинакового размера – матрица этого же размера, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов матриц A и B.

- **Ранг матрицы –** наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Или, что то же самое, наибольшее число линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы.
- **Расширенная матрица системы** линейных уравнений – матрица системы, к которой справа приписан столбец свободных коэффициентов.
- **Регрессия** - представление одной случайной величины как функции другой.
- **Решение дифференциального уравнения – это** неявно заданная функция Ф(х, у) = 0 (в некоторых случаях функцию у можно выразить через аргумент х явно), которая обращает дифференциальное уравнение в тождество.
- **Решение** системы линейных уравнений – совокупность n чисел $(x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ \dots, x_n = k_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.
- **Свободные переменные** в системе линейных уравнений – переменные, не являющиеся основными.
- **Система из m линейных уравнений с n переменными (неизвестными)** – система уравнений вида
- **Система уравнений неопределенная** – система, имеющая более одного решения.
- **Система уравнений несовместная** – система, не имеющая решений.
- **Система уравнений определенная** – система, имеющая единственное решение.
- **Система уравнений совместная** – система, имеющая хотя бы одно решение.
- **Системы уравнений равносильные** – системы, имеющие одно и то же множество решений.
- **Системы уравнений эквивалентные** – то же, что и **системы уравнений равносильные**.
- **Случайная величина** - величина, которая имеет неизвестное значение до испытания (множество альтернатив), а в результате информативного испытания может принять какое-либо определенное или более ограниченное в альтернативах значение.
- **Состоятельная оценка** - оценка, которая при $n > n_0$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.
- **Статистическая гипотеза** - гипотеза (предположение) о виде неизвестного распределения, или параметрах неизвестного распределения.
- **Статистический критерий** - случайная величина, служащая для проверки нулевой гипотезы.
- **Статистическое распределение выборки** - перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

- **Степень** $A^m\ (m = 2,3,4,\ldots)$ квадратной матрицы A – произведение m матриц, равных A.
- **Столбец свободных коэффициентов** в системе линейных уравнений – то же, что **матрица-столбец свободных коэффициентов** в системе линейных уравнений .
- **Стохастическая зависимость** - зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение другой.
- **Сумма n-мерных векторов** – вектор, каждая компонента которого равна сумме соответствующих компонент исходных векторов.
- **Сумма векторов** $\overline{a}$ и $\overline{b}$ таких, что конец вектора $\overline{a}$ совпадает с началом вектора $\overline{b}$ – вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец – с концом вектора $\overline{b}$.
- **Сумма матриц** A и B одинакового размера – матрица того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.
- **Сходящаяся числовая последовательность** – имеет предел, причем всегда единственный.
- **Теорема Лапласа** - определение вероятности наступления события в k измерениях из n (при больших k и n).
- **Теория вероятностей** - наука, изучающая общие закономерности случайных явлений массового характера.
- **Точечная оценка** - оценка, которая определяется одним числом.
- **Точка экстремума** – точка, в которой достигается экстремум.
- **Транспонирование матрицы –** переход от матрицы A к матрице A', в которой столбцы и строки поменялись местами с сохранением порядка.
- **Условная вероятность** - вероятность наступления интересующего нас события, связанная с дополнительными условиями.
- **Формула Байеса** - определение апостериорной (послеопытной) вероятности на основе априорной (доопытной) на основе проведения эксперимента.
- **Формула Бернулли** - определение вероятности наступления события в измерениях из n.
- **Функция** ***y=f(x)*** – зависимость f, при которой каждому $x \in D$ ставится в соответствие единственное значение $y \in E$.
- **Функция** называется **непрерывной в точке**, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.
- **Функция распределения** - функция, определяющая вероятность того, что X примет значение меньше x.
- **Характеристики положения** - характеристики, определяющие наиболее возможные значения случайной величины.

- **Характеристики рассеивания** - характеристики, определяющие разброс возможных значений случайной величины.
- **Характеристическое уравнение** квадратной матрицы A – уравнение $|A - \lambda E| = 0$ с неизвестным λ.
- **Центральная предельная теорема** - теорема, доказывающая, что суммирование большого числа случайных величин с различными законами распределения приводит в итоге к нормальному распределению.
- **Частное решение** системы линейных уравнений – произвольное решение этой системы.
- **Числовая последовательность** $\boldsymbol{x_n}$ – функция, заданная на множестве натуральных чисел $x_n = f(n)$.
- **Экстремум** – максимальное или минимальное значение функции на заданном множестве.
- **Эксцесс распределения** - мера островершинности распределения, величина, определяемая отношением центрального момента четвертого порядка к четвертой степени среднего квадратического отклонения за вычетом тройки. Эксцесс показывает, как быстро уменьшается плотность распределения вблизи её максимального значения. Для нормального распределения Гаусса эксцесс равен нулю.
- **Элементы матрицы –** числа заполняющие матрицу.
- **Эллипс** – геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2a.
- **Эффективная оценка** - такая оценка, которая при заданном объеме выборки n имеет наименьшую возможную дисперсию.

Список литературы

1. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник / В.С. Шипачев.– М.: ИНФРА-М, 2018. – 479 с. – (Высшее образование). – Режим доступа: www.dx.doi.org/10.12737/5394.
2. Высшая математика [Электронный ресурс]: практикум / И.Г. Лурье, Т.П. Фунтикова.– М.: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2013.– 160 с. – Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=368074
3. Краткий курс высшей математики [Электронный ресурс]/ К.В. Балдин.– 2-е изд.– М.: Дашков и К, 2017. – 510 с. – Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=415059
4. Математика для экономического бакалавриата [Электронный ресурс]: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.– М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. – 472 с.– (Высшее образование: Бакалавриат). – Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=558399
5. Кокшарова, Г.А. Высшая математика: тесты для промежуточного контроля знаний у студентов экономических специальностей ВГМХА по высшей математике / Г.А. Кокшарова, В.Ю. Ивановская.– Вологда – Молочное, 2005.– 55 с.
6. Кокшарова, Г.А. Математика: методические указания и контрольные задания для студентов-экстернов экономических специальностей ВГМХА / Г.А. Кокшарова, В.Ю. Ивановская.– Вологда: ИЦ ВГМХА, 2010.– 50 с.
7. Ивановская, В.Ю. Математика: краткий курс лекций для студентов заочного отделения факультета агрономии и лесного хозяйства, направления подготовки: 110400 – «Агрономия», 250100 – «Лесное дело» / В.Ю. Ивановская.– Вологда – Молочное: 2012.– 63 с.
8. Ивановская, В.Ю. Математический анализ [Текст]: учебное пособие / В.Ю. Ивановская. – Вологда – Молочное: ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА, 2018. – 106 с.
9. Ивановская, В.Ю. Аналитическая геометрия в пространстве [Текст]**:** методические указания / В.Ю. Ивановская. – Вологда–Молочное: ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА, 2017. – 26 с.
10. Ивановская, В.Ю. Элементы линейной алгебры [Текст]: учебно-методическое пособие для студентов бакалавриата / В.Ю. Ивановская, Г.А. Кокшарова. – 2-е изд. – Вологда–Молочное: Вологодская ГМХА, 2016. – 53 с.
11. Ивановская, В.Ю. Линейная алгебра [Текст]: учебное пособие / В.Ю. Ивановская. – Вологда – Молочное: ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА, 2018. – 123 с.
12. Ивановская, В.Ю. Аналитическая геометрия на плоскости [Текст]: методические указания для студентов бакалавриата / В.Ю. Ивановская.– Вологда–Молочное: ИЦ ВГМХА, 2015. – 27 с.
13. Кокшарова, Г.А. Линейная алгебра [Текст]: сборник заданий / Г.А. Кокшарова, В.Ю. Ивановская. - Вологда–Молочное: ИЦ ВГМХА, 2008. – 44 с.
14. Кокшарова, Г.А. Элементы линейной алгебры [Текст]: учебно-методическое пособие для студентов экономических специальностей ВГМХА / Г.А. Кокшарова, В.Ю. Ивановская. – Вологда–Молочное, 2006. – 53 с.
15. Лактионов, С.А. Поверхности второго порядка [Текст]: методические указания / С.А.Лактионов. – Новокузнецк : Изд. центр Сиб- ГИУ, 2014. – 13 с.

16. Теория вероятностей и математическая статистика: Методические указания и контрольные задания/ Сост. Н.А. Кучанская. – Вологда–Молочное: ИЦ ВГМХА, 2012. – 33 с.
17. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для бакалавров. – 12-е изд. – М.: Юрайт, 2012. – 479 с.
18. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Руководство к решению задач. – 6-е изд. – М.: Юрайт, 2012. – 406 с.
19. Ивановская, В.Ю. Линейная алгебра [Текст]: учебное пособие / В.Ю. Ивановская. – Вологда – Молочное: ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА, 2012. – 32 с.

Полезные ссылки

Официальный сайт ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА

Образовательный портал ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА

ВИКИПЕДИЯ – свободная энциклопедия

ОНЛАЙН – КАЛЬКУЛЯТОР на YANDEX.RU

GOOGLE ПОИСК

ЯНДЕК ПОИСК

СОДЕРЖАНИЕ