Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодская государственная молочнохозяйственная академия имени Н.В. Верещагина»

Инженерный факультет

Кафедра технические системы в агробизнесе

В. Ю. Ивановская

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

для студентов, обучающихся по направлениям подготовки

35.03.06 - Агроинженерия, 35.02.16 - Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования, 23.02.07 - Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей, 19.02.12 - Технология продуктов питания животного происхождения

Вологда – Молочное
2023

УДК 517(07)
ББК 22.16я7
И22

Рецензенты:
к.т.н., доцент кафедры технические системы в агробизнесе ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА
Н.Н. Кузнецов;
к.э.н., доцент кафедры энергетических средств и технического сервиса ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА
Н.И.Кузнецова;
к.т.н., доцент кафедры технические системы в агробизнесе ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА
А.С.Михайлов.

Ивановская В.Ю.

И22 МАТЕМАТИКА: учебное пособие / В.Ю. Ивановская. – Вологда - Молочное: ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА, 2023. – 106 с.

ISBN

Основной целью учебного пособия МАТЕМАТИКА является стимулирование самостоятельной работы студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.02.16 - Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования, 23.02.07 - Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей, 19.02.12 - Технология продуктов питания животного на основе использования данного пособия, как руководства к изучению теории, решению представленных в нем практических задач и выполнению индивидуальных заданий.

Рекомендовано методическим советом академии в качестве учебного пособия и издается по решению редакционно-издательского совета ФГБОУ ВО Вологодской ГМХА.

УДК 517(07)
ББК 22.16я7

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ содержит тот необходимый минимум теоретических сведений, который будет способствовать успешному усвоению материала и его применению к решению различных практических задач. Темы, рассматриваемые в пособии, выбраны таким образом, чтобы в них содержались основные понятия тех разделов, которые включены в данный курс, с целью оказания помощи при проведении аудиторных занятий, организации самостоятельной работы студентов в подготовке к промежуточной аттестации и выполнении индивидуальных заданий по разделам курса. После изложения теоретического материала в каждой главе приводится ряд задач. Так же пособие содержит индивидуальные задания и проверочные тесты по каждому основному разделу курса, решение которых требуют знаний данного раздела МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

1 МНОЖЕСТВА. ВИДЫ МНОЖЕСТВ. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. МЕРА МНОЖЕСТВА

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [1], [2], [4].

1.1 Виды множеств. Операции над множествами

Множества как тип данных оказались очень удобными для программирования сложных жизненных ситуаций, так как с их помощью можно точно моделировать объекты реального мира и компактно отображать сложные логические взаимоотношения.

В математике понятие множества является одним из основных.

Известно, что "***множество***" – это неопределяемое понятие математики. Известный немецкий математик Георг Кантор, чьи работы лежат в основе современной теории множеств, говорил, что «под «множеством» мы понимаем соединение в некое целое M определённых хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления, которые будут называться «элементами» множества M». Системы, семейства, совокупности – это синонимы понятия множество.

Множества обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, а все объекты, образующие множество, называются их ***элементами*** и обозначаются строчными буквами a, b, c. Запись $a \in R$ означает, что элемент a принадлежит множеству R, то есть a является элементом множества R. В противном случае, когда a не принадлежит множеству R, пишут $a \notin R$.

Множества могут содержать конечное или бесконечное количество объектов. Например, число студентов первокурсников, число зрителей в кинотеатре, количество точек на прямой и т.д.

Два множества A и B называются ***равными*** ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества A является элементом множества B и наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A.

Говорят, что множество A является ***подмножеством*** множества B (в этом случае пишут $A \subset B$), если каждый элемент множества A одновременно является элементом множества B (рис.1).

Пример 1. Пусть A – число студентов, обучающихся на первом курсе, а B – число всех студентов факультета, то $A \subset B$.

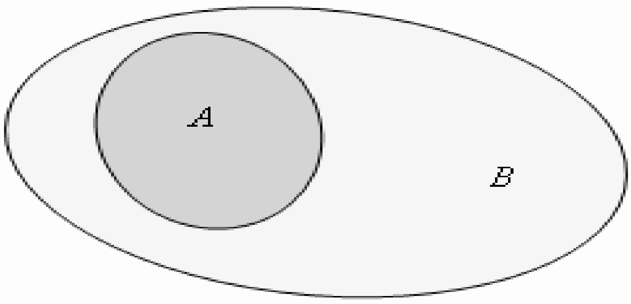


Рисунок 1 - Подмножество A

Объединение множеств A и B ($A \cup B$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит либо A , либо B.

Пересечение множеств ($A \cap B$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит и A и B (рис. 2).

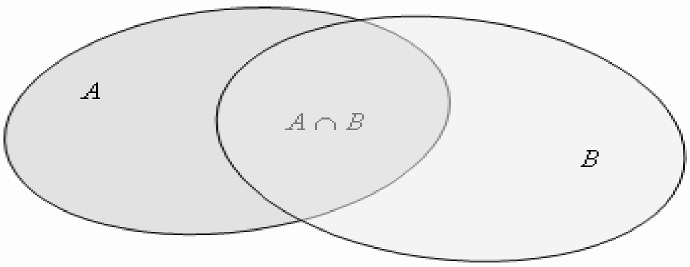


Рисунок 2 - Произведение множеств A и B

Разность множеств A и B есть множество элементов ($A \backslash B$), которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B (рис. 3). Это множество называется также ***дополнением множества*** B относительно множества A.

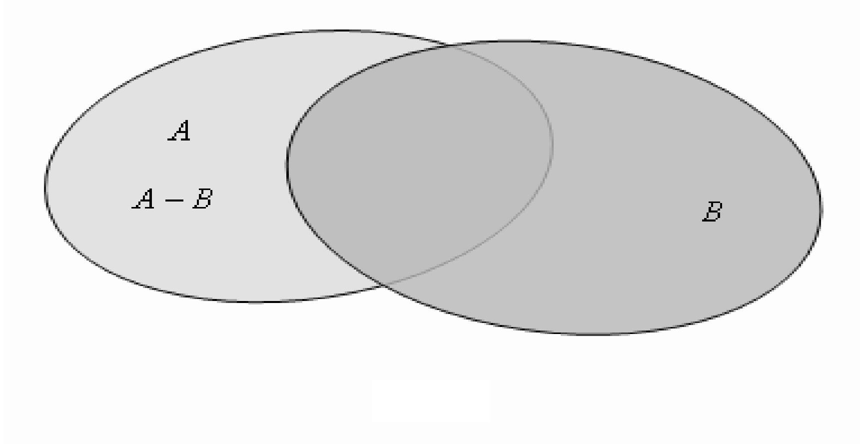


Рисунок 3 - Разность множеств *A* и *B*

Элементами множества могут быть любые объекты – числа, векторы, точки, матрицы и т.п. В частности элементами множества могут являться множества. Минимальным множеством является ***пустое множество*** – $\varnothing$, которое не содержит ни одного элемента. Множества, все элементы которого числа, называется ***числовым***.

Символика математической логики представлена на рисунке 4.

∃ – «существует» или «найдется»

∃! – «существует строго один элемент» или «существует единственный элемент»

∀ – «для любого», «для всякого», «для всех»

⇒ – «следует», «имеет место»

⇔ – знак равносильности, «тогда и только тогда»

∨ – знак логического сложения (читается «или»)

∧ – знак логического умножения (читается «и»)

Рисунок 4 - Логические символы

Пример 2. Равны ли множества A = {3,4,5} и B = {5,4,3}?

Решение. Так как множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то они равны.

Пример 3. Пусть множество A = {1,2,3,4,5}, а множество состоит из чисел B = {2,4,6,8}. Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$.

Решение. $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$; $A \cap B=\{2,4\}$; $A \setminus B=\{1,3,5\}$.

Для числовых множеств общепринятыми являются следующие обозначения:

- $\mathbb{N}$ = {1,2,3,4…} - множество натуральных чисел (целых положительных чисел);
- $\mathbb{Z}$= {…-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,…} - множество всех целых чисел, куда входят положительные и отрицательные целые числа, а также нуль;
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}$, где $m \in z, n \in N\}$ - множество рациональных чисел;
- $\mathbb{R}$ - множество действительных чисел, в которое входят все рациональные числа, а также числа иррациональные (которые могут быть представлены в виде бесконечной непериодической десятичной дроби);
- множества бывают конечными и бесконечными. Конечное множество - это множество, для которого существует натуральное число, являющееся числом его элементов.
- отрезки $[a, b]$, где $a < b$, состоят из действительных чисел x таких, что $a \ll x \ll b$;
- интервалы конечные (a, b), где $a < b$ и бесконечные $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$;
- конечные и бесконечные полуинтервалы $[a, b)$ и $(a, b]$, где $a < b$.

Отрезки, интервалы и полуинтервалы называются ***промежутками.***

Свойства операций над множествами:

1). если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность),
2). если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$,
3). $A \cup A = A$,
4). $A \cup \varnothing = A$,
5). $A \cap A = A$,
6). $A \cap \varnothing = \varnothing$,
7). $A - A = \varnothing$,
8). $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность сложения),
9). $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность умножения),
10). $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность сложения),
11). $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность умножения),
12). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно сложения),
13). $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно вычитания),
14). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Пример 4. Выполнить следующие операции над множествами:

a) $\{2,3,4\} \cup \{2,4,6\}$;

b) $\{2,3,4\} \cap \{2,4,6\}$;

c) $\{2,3,4\} \setminus \{2,4,6\}$.

Решение.

a) $\{2,3,4\} \cup \{2,4,6\}=\{2,3,4,6\}$;

b) $\{2,3,4\} \cap \{2,4,6\}=\{2,4\}$;

c) $\{2,3,4\} \setminus \{2,4,6\}=\{3\}$

Пример 5. В группе из 50 туристов 30 человек знают английский язык, 25 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

Решение. Обозначим: U – множество всех туристов,

A – множество туристов, знающих английский язык,

B – множество туристов, знающих французский язык,

D – множество туристов не знающих ни английского ни французского языка.

Необходимо найти количество туристов, не знающих ни одного языка, т.е. количество элементов множества $D = U \setminus (A \cup B)$ (на рисунке 5 заштриховано). По условию: $m(U) = 50$ (чел.), $m(A) = 30$ (чел.), $m(B) = 25$ (чел.), $m(A \cap B) = 23$ (чел.). Тогда, $m(D) = m(U) - m(A \cup B)$.

Используя формулу, находим количество туристов, знающих хотя бы один язык: $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) = 30 + 25 - 23 = 32$.

Тогда, искомое количество туристов, не знающих ни одного языка:

$m(D) = m(U) - m(A \cup B) = 50 - 32 = 18$ (чел.)

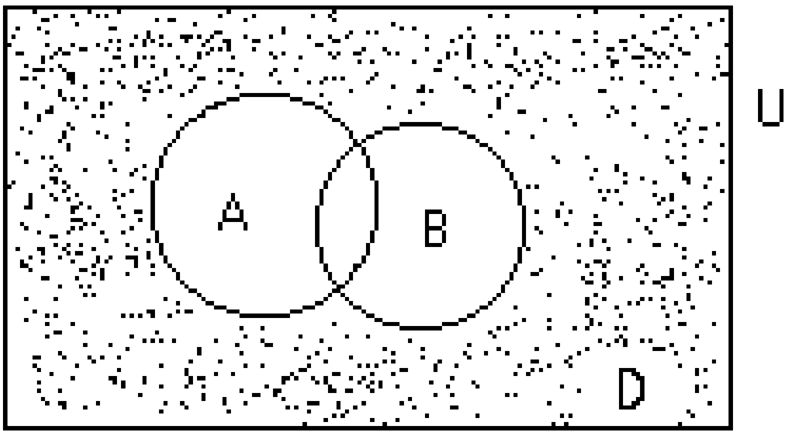


Рисунок 5 - Множество туристов

1.2 Мера множества. Свойства меры множества

Мера μ – неотрицательная величина, обобщающая понятия длины отрезка, площади плоской фигуры и объёма тела на множества более общей природы.

Задача определения длины множеств, или, как говорят еще, задача измерения множеств, весьма важна, так как она имеет существенное значение для обобщения понятия интеграла. Понятие меры множества применяется и в других вопросах теории функций, а также в теории вероятностей, топологии, функциональном анализе и т. д.

Мера открытого множества есть сумма длин составляющих его интервалов. В частности, мера одного интервала равна его длине

$$\mu(a,b) = b - a.$$

Мера произвольного отрезка равна его длине

$$\mu[a,b] = b - a,$$

Точно так же если имеется два непересекающихся отрезка, то под мерой множества, состоящего из этих двух отрезков, естественно понимать число $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)$.

Из определения следует, что мера обладает следующими свойствами:

1. Мера пустого множества равна нулю

$$\mu(\varnothing) = 0$$

2. Монотонность — мера подмножества не больше меры самого множества

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$$

3. Мера разности вложенных множеств равна разности мер этих множеств

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$$

4. Мера множества, состоящего из конечного числа точек, равна нулю.

<u>Пример 6.</u> Найти меру множества $(1,3) \cup (5,9)$
<u>Решение.</u> $(1,3) \cup (5,9) = (3-1) + (9-5) = 6$

<u>Пример 7</u>. Найти меру заштрихованного множества (см. рис.6).

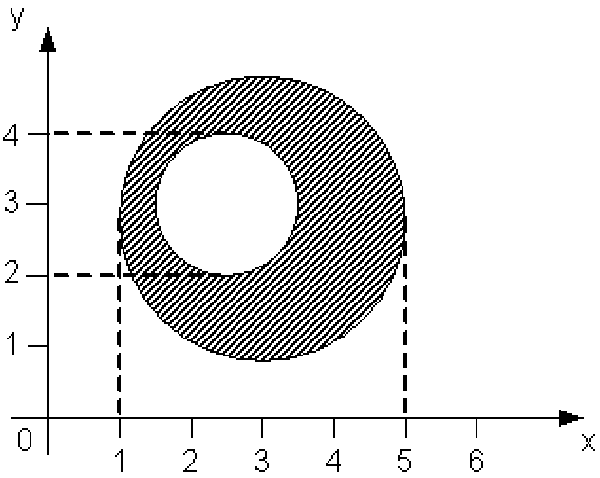


Рисунок 6 - Мера множества

Решение. Обозначим C – площадь заштрихованной фигуры, B – площадь внешнего круга, A – площадь внутреннего круга.

Тогда, $\mu(C) = \mu(B) - \mu(A) = S(B) - S(A)$.

$$\mu(C) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi 2^2 - \pi 1^2 = 4\pi - \pi = 3\pi$$

Пример 8. Доказать равенство $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Решение. Пусть $x \in A \cap B$, тогда $x \in A, x \in B$.
Пусть $x \in A \ (A \setminus B)$, тогда $x \in A, x \in B$.
Видим, что равенство справедливо.

1.3 Вопросы для самопроверки

1) Что понимается под «множеством»?
2) Что является элементами множества?
3) Какие два множества будут равными?
4) В каком случае множество A является подмножеством множества B?
5) Как обозначается пустое множество?
6) Какое множество называется пересечением множеств A и B?
7) Перечислить основные числовые множества.
8) Какие основные логические символы известны?
9) Что называют промежутками?
10) Что понимают под мерой множества?
11) Свойства меры множества.

2 ФУНКЦИИ. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [4], [3], [5].

2.1 Понятие функции. Способы задания

Одним из основных понятий математики является понятие функции. Оно связано с установление зависимости между элементами двух множеств.

Если каждому элементу x из множества *X* ставится в соответствие один и только один элемент *y* множества *У*, то говорят, что на множестве *X* задана ***функция y =f(x).*** При этом *x* является независимой переменной (или аргументом), а *y* – зависимой переменной.

Множество *X* называется ***областью определения функции*** и обозначается *D(y),* а множество *У* – ***областью значений функции*** *E(y).* ***Область допустимых значений*** функции (ОДЗ) это множество тех значений переменной x, при которых функция *f(x)* имеет смысл.

Пример 9. Определить ОДЗ функции $y = \frac{5}{2x-6}$.

Решение. Функция имеет смысл при всех x, кроме $2x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$. Тогда ОДЗ будет объединением промежутков $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

Существует несколько способов задания функции:

- Аналитический – с помощью формулы.

Пример 10. Функция $y = x^3$ определена на интервале $(-\infty, +\infty)$.

- Табличный – функция задается таблицей ряда значений x и y.

Пример 11.

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_1	y_2	y_3	y_4

- Графический – с помощью графика функции (рис.7).

Пример 12.

Рисунок 7 - Графическое задание функции

2.2 Свойства функций

К основным свойствам функций относятся:

1)Четность/нечетность. Функция является ***четной***, если $y(-x) = y(x)$. Четность функции указывает на симметрию графика относительно оси ординат.

Функция является **нечетной**, если $y(-x) = -y(x)$. Нечетность функции указывает на симметрию графика относительно начала координат (см. рис.8).

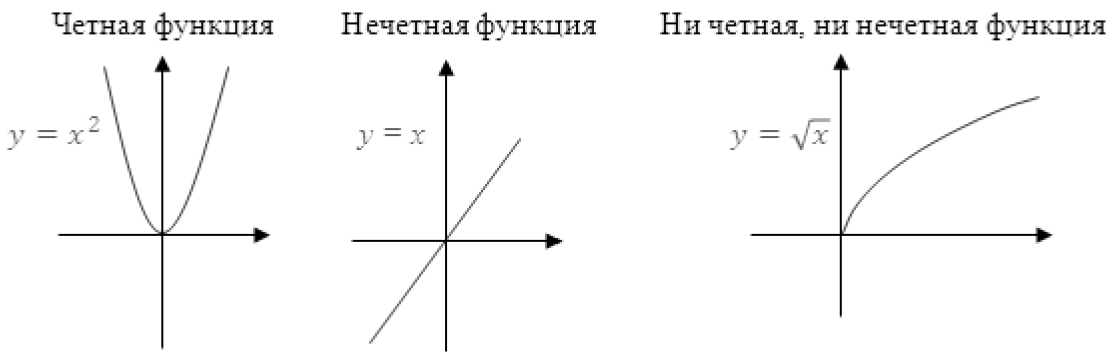


Рисунок 8 - Четность/нечетность функций

2) Монотонность (возрастание/убывание)функции.

Если функция определена на промежутке D *и для любых значений* x_1 *и*
$x_2 \in D$, из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция назывется возрастающей, если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, то функция убывающая на прмежутке D.

Если функция убывает или возрастает на промежутке D, то она называется ***монотонной*** на этом промежутке (рис.9.).

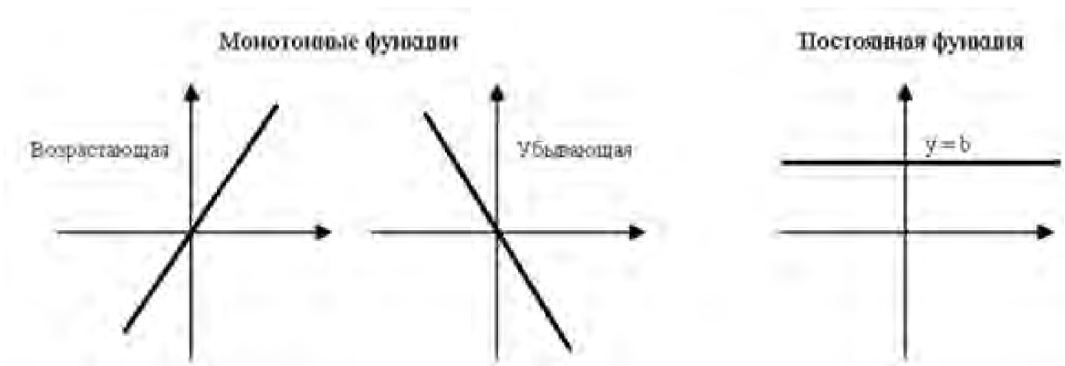


Рисунок 9 - Монотонность функции

3) Периодичность (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода). Функция называется ***периодической***, если существует такое ненулевое число T, *что* $f(x+T)=f(x)$, где T – период (рис.10).

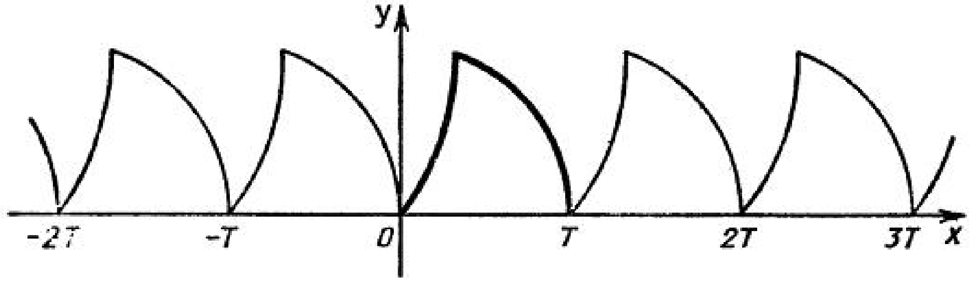


Рисунок 10 - Периодическая функция

Пример 13. Исследовать функцию $f(x)=x^2$ на четность.

Решение. Для заданной функции $f(-x)=f(-x)^2\ =x^2=f(x)$. Значит, эта функция четная.

Пример 14. Функция $\cos x$ является периодической с периодом $T=2\,\pi$, так как $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)=\cos x$.

2. 3 Основные элементарные функции, их свойства и графики

Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются ***элементарными***.

Знание основных элементарных функций, их свойств и графиков определенно важно. Они являются фундаментом, на них все основано, из них все строится и к ним все сводится.

Рассмотрим основные элементарные функции, приведем их графики и свойства.

Основными элементарными функциями являются: постоянная функция (константа), корень n-ой степени, степенная функция, показательная, логарифмическая функция, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

2.3.1 Постоянная функция

Постоянная функция задается на множестве всех действительных чисел формулой $y=c$, где C– некоторое действительное число. Постоянная функция ставит в соответствие каждому действительному значению независимой переменной x одно и то же значение зависимой переменной y – значение C. Постоянную функцию также называют константой.

Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку с координатами *(0,C)*.

Для примера покажем графики постоянных функций $y=5$, $y=-2$ и $y = \sqrt{3}$, которым на рисунке, приведенном ниже, отвечают черная, красная и синяя прямые соответственно.

Рисунок 11 - Постоянная функция

Свойства постоянной функции:

- Область определения: все множество действительных чисел.
- Постоянная функция является четной.
- Область значений: множество, состоящее из единственного числа C.

2.3.2 Корень *n*-ой степени

Рассмотрим основную элементарную функцию, которая задается формулой $\boldsymbol{y = \sqrt[n]{x}}$, где n – натуральное число, большее единицы:

а) Корень n-ой степени, n - четное число.

Начнем с функции корень n-ой степени при четных значениях показателя корня n.

Для примера приведем рисунок с изображениями графиков функций $\boldsymbol{y = \sqrt{x}, y = \sqrt[4]{x}}$ ***и*** $\boldsymbol{y = \sqrt[8]{x}}$ **.**

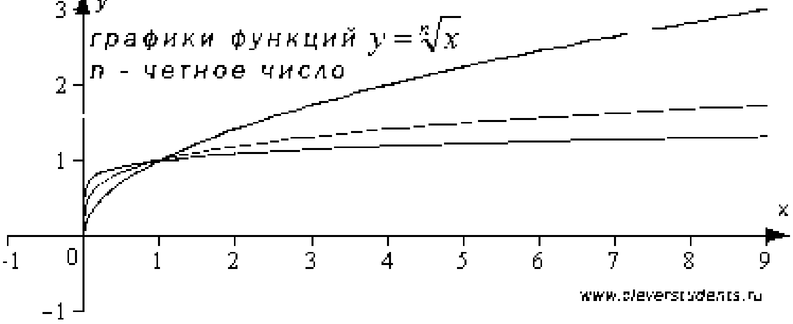


Рисунок 12 - Корень n-ой степени, n - четное число

Аналогичный вид имеют графики функций корень четной степени при других значениях показателя.

Свойства функции корень n-ой степени при четных n.

- Область определения: множество всех неотрицательных действительных чисел $[0, +\infty)$.
- При $x=0$ функция $y = \sqrt[n]{x}$ принимает значение, равное нулю.
- Эта функция общего вида (не является четной или нечетной).
- Область значений функции: $[0, +\infty)$.
- Функция $\boldsymbol{y = \sqrt[n]{x}}$ при четных показателях корня возрастает на всей области определения.

b) Корень n-ой степени, n - нечетное число.

Функция корень n-ой степени с нечетным показателем корня n определена на всем множестве действительных чисел. Для примера приведем графики функций $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x}, y = \sqrt[5]{x}}$ ***и*** $\boldsymbol{y = \sqrt[9]{x}}$ и , им соответствуют черная, красная и синяя кривые.

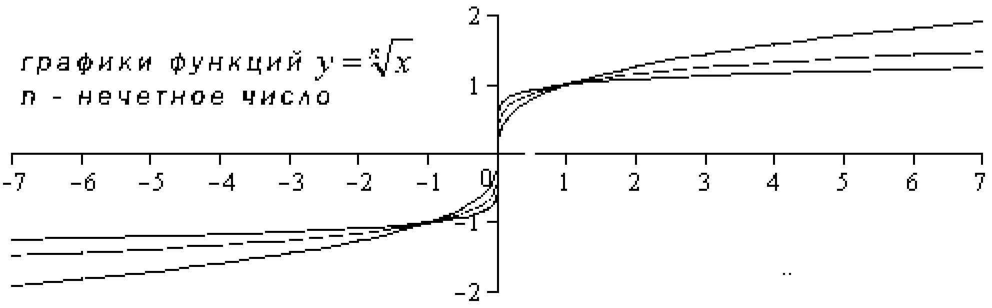


Рисунок 13 - Корень n-ой степени, n - нечетное число

При других нечетных значениях показателя корня графики функции $\boldsymbol{y = \sqrt[n]{x}}$ будут иметь схожий вид.

Свойства функции корень n-ой степени при нечетных n.

- Область определения: множество всех действительных чисел.
- Эта функция нечетная.
- Область значений функции: множество всех действительных чисел.
- Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетных показателях корня возрастает на всей области определения.

2.3.3 Степенная функция

Степенная функция задается формулой вида $\boldsymbol{y = x^a}$.

Рассмотрим степенную функцию с целым показателем a. В этом случае вид графиков степенных функций и свойства функций зависят от четности или нечетности показателя степени, а также от его знака. Свойства степенных функций с дробными и иррациональными показателями (как и вид графиков таких степенных функций) зависят от значения показателя *a (Рис. 14)*.

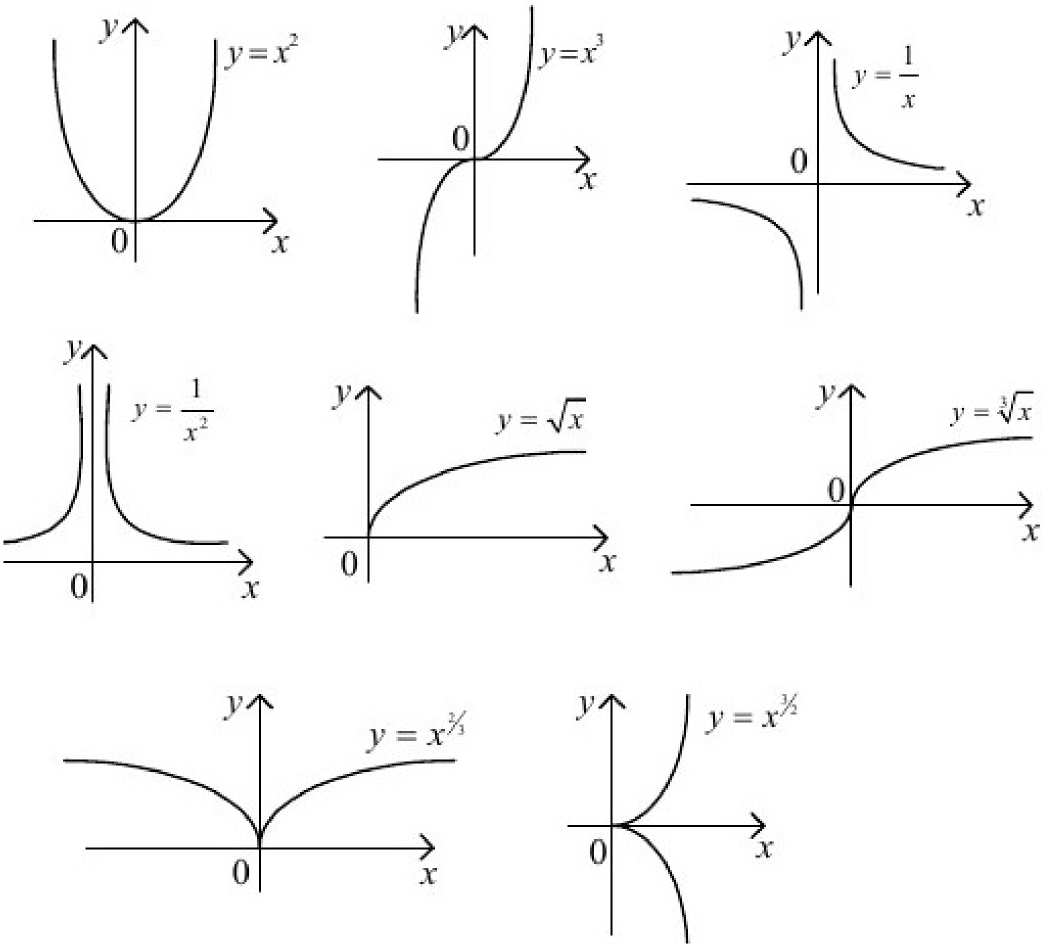


Рисунок 14 - Степенная функция

2.3.4 Показательная функция

Одной из основных элементарных функций является показательная функция.

График показательной функции $\boldsymbol{y = x^a}$, где $\boldsymbol{a} > 0$ *и* $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$ принимает различный вид в зависимости от значения основания *a*. Разберемся в этим.

а) Сначала рассмотрим случай, когда основание показательной функции принимает значение от нуля до единицы, то есть, $\mathbf{0} < a < 1$

Для примера приведем графики показательной функции при *a = 1/2* – синяя линия, *a = 5/6* – красная линия. Аналогичный вид имеют графики показательной функции при других значениях основания из интервала $\mathbf{0} < a < 1$.

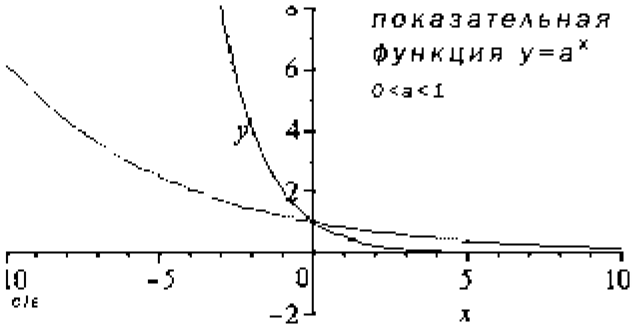


Рисунок 15 - Показательная функция, $0 < a < 1$

Свойства показательной функции с основанием меньшим единицы.

- Областью определения показательной функции является все множество действительных чисел: x $\in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: .y$\in(0; +\infty)$
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Показательная функция, основание которой меньше единицы, убывает на всей области определения.

b) Переходим к случаю, когда основание показательной функции больше единицы, то есть, $a > 1$.

В качестве иллюстрации приведем графики показательных функций $\boldsymbol{y} = (\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}})^{\boldsymbol{x}}$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$. При других значениях основания, больших единицы, графики показательной функции будут иметь схожий вид.

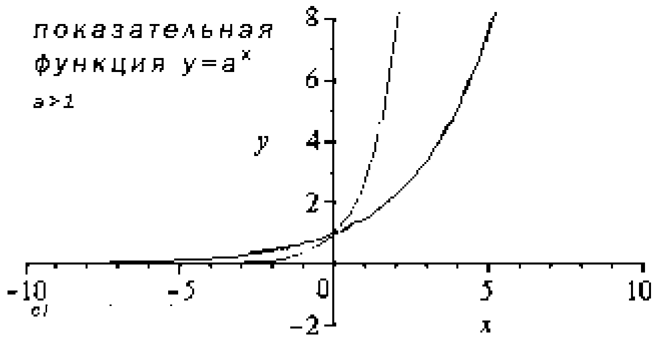


Рис.16. Показательная функция, $a > 1$.

Свойства показательной функции с основанием большим единицы.

- Область определения показательной функции: $\boldsymbol{y} \in (-\infty; \infty)$ **.**
- Область значений: $\mathbf{y} \in (\mathbf{0}; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

- Показательная функция, основание которой больше единицы, возрастает при $\boldsymbol{x} \in (-\infty; +\infty)$.

2.3.5 Логарифмическая функция

Следующей основной элементарной функцией является логарифмическая, когда $a \neq 0$. Логарифмическая функция определена лишь для положительных значений аргумента, то есть, при $x\epsilon(0; +\infty)$.

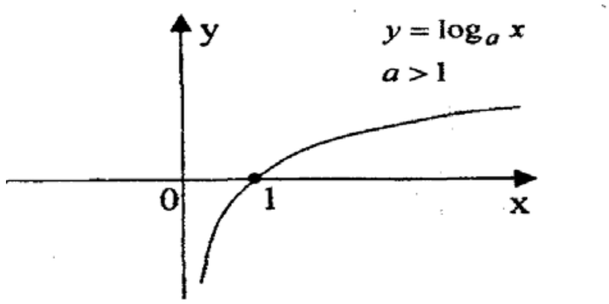


Рисунок 17 - Логарифмическая функция $a > 1$

График логарифмической функции принимает различный вид в зависимости от значения основания a.

Рассмотрим случай, когда $0 < a < 1$.

Для примера приведем графики логарифмической функции при *a = 1/2* . При других значениях основания, не превосходящих единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.

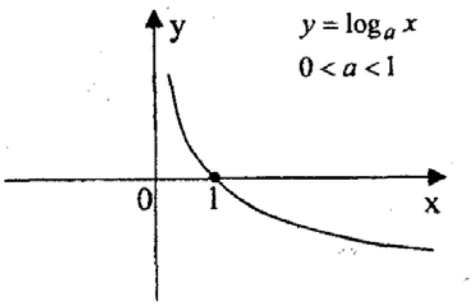


Рисунок 18 - Логарифмическая функция $0 < a < 1$

Свойства логарифмической функции с основанием меньшим единицы.

- Область определения логарифмической функции: $x \in (0; +\infty)$. При x стремящемся к нулю справа, значения функции стремятся к плюс бесконечности.
- Область значений: $\boldsymbol{y} \in (-\infty; +\infty)$.

- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Логарифмическая функция убывает на всей области определения.

2.3.6 Тригонометрические функции, их свойства и графики

Тригонометрическим функциям присуще понятие периодичности (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода $f(x+T)=f(x)$, где T - период), поэтому, в список свойств тригонометрических функций добавлен пункт *«наименьший положительный период»*.

Также для каждой тригонометрической функции мы укажем значения аргумента, при которых соответствующая функция обращается в ноль.

Функция *y = sin(x)*. Построим ее график (см. рис.19).

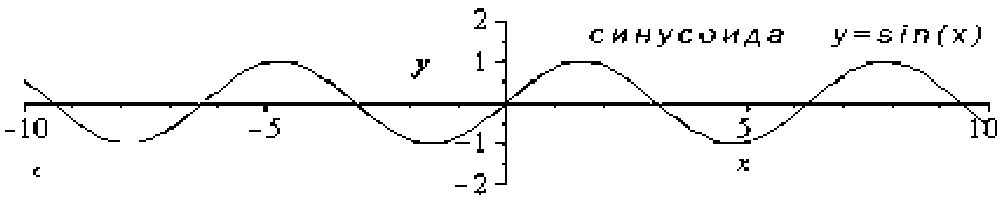


Рисунок 19 - Функция *y = sinx*

Свойства функции *y = sinx*:

- Областью определения функции является все множество действительных чисел, то есть, функция *y = sinx* определена при $\boldsymbol{x} \in (-\infty; +\infty)$.
- Наименьший положительный период функции равен двум пи: $T = 2\pi$,
- Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Функция принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $\boldsymbol{y} \in [-1; 1]$.
- Функция - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], k\epsilon z$, возрастает при $x\epsilon \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], k\epsilon z$.

Функция *y = cos(x)* (см.рис.20).

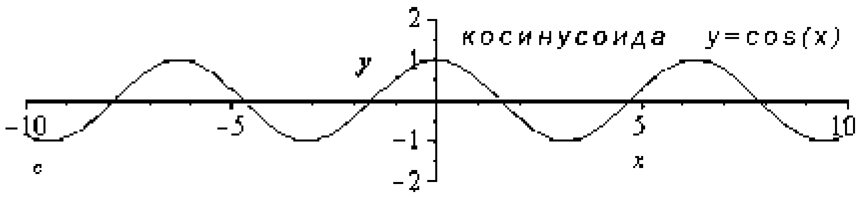


Рисунок 20 - Функция *y = cosx*.

Свойства функции *y = cosx*:

- Область определения функции: $\boldsymbol{x\epsilon}(-\infty; +\infty)$.
- Наименьший положительный период функции *y = cosx* равен двум пи: $T = 2\pi$.
- Функция обращается в ноль при $\boldsymbol{x} = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k\epsilon z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции представляет интервал от минус единицы до единицы включительно: $y\epsilon[-1; +1]$.
- Функция - четная, так как $\boldsymbol{y}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$.
- Функция убывает при $x\epsilon[2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], k\epsilon z$, возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], k\epsilon z$.

Функция *y = tg(x)*(см. рис.21).

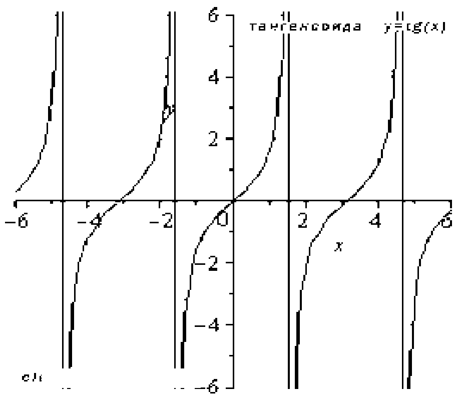


Рисунок 21 - Функция *y = tgx*

Свойства функции *y = tgx*:

- Область определения функции: $x\epsilon(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k)$,

где $k\epsilon z$, Z – множество целых чисел.

Поведение функции *y = tgx* на границе области определения $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}=\pi\cdot k+0} tg(x) = -\infty, \lim_{x\to\frac{\pi}{2}\cdot k-0} tg(x) = +\infty$

Следовательно, прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \epsilon z$, являются вертикальными асимптотами.

- Наименьший положительный период функции $T = \pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, *где* $k \epsilon z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции *y = tgx*: $y \epsilon (-\infty; +\infty)$.
- Функция - нечетная, так как y(-x)=-y(x) .
- Функция возрастает при $x \epsilon \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + g \cdot k\right), k \epsilon z$.

Функция *y = ctgx* (см. рис.22).

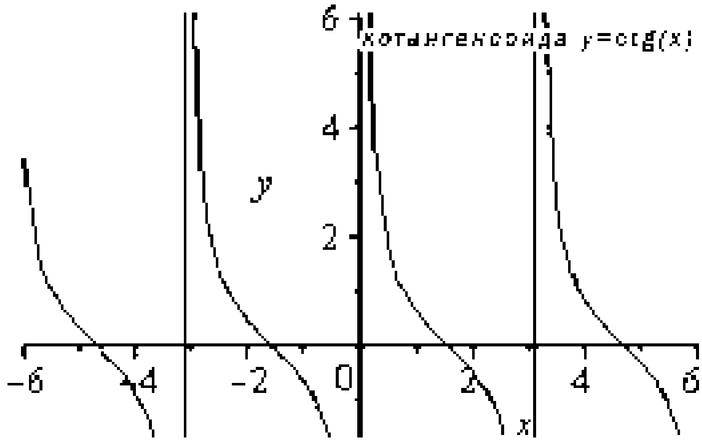


Рисунок 22 - Функция *y = ctgx*

Свойства функции *y = ctgx*.

- Область определения функции: $x \epsilon (\pi \cdot k; \pi + \pi \cdot k)$, где $k \epsilon z$, Z – множество целых чисел.

Поведение на границе области определения

$$\lim_{x \to \pi \cdot k + 0} tg(x) = +\infty, \lim_{x \to \pi \cdot k - 0} tg(x) = -\infty$$

Следовательно, прямые $x = \pi \cdot k$, где kϵz являются вертикальными асимптотами.

- Наименьший положительный период функции *y = ctgx* равен: $T = \pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \epsilon z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции: $y \epsilon (-\infty; +\infty)$.

- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция *y = ctgx* убывает при $x\epsilon(\pi \cdot k; \pi + \pi \cdot k), k\epsilon z.$

2.3.7 Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики

Обратные тригонометрические функции являются основным элементарным функциями.

Рассмотрим их графики и перечислим свойства.

Функция *y = arcsin(x)* (рис.23).

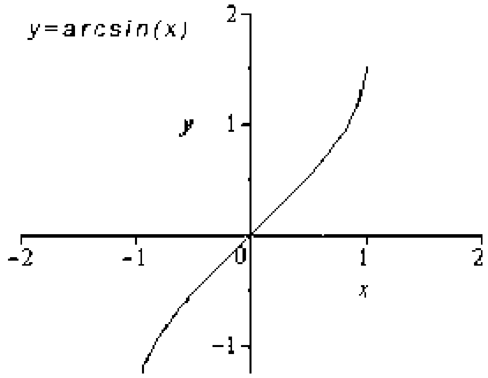


Рисунок 23 - Функция y = arcsin(x)

Свойства функции *y = arcsin(x)*:

- Областью определения функции является интервал от минус единицы до единицы включительно: $x\epsilon[-1; 1]$.
- Область значений функции *y = arcsin(x)*: $y\epsilon[-\frac{\pi}{2};\ \pi.2]$.
- Функция - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция *y = arcsin(x)* возрастает на всей области определения, то есть, при $x\epsilon[-1; 1]$.

Функция *y = arccos(x)*.

График функции имеет вид (рис.24):

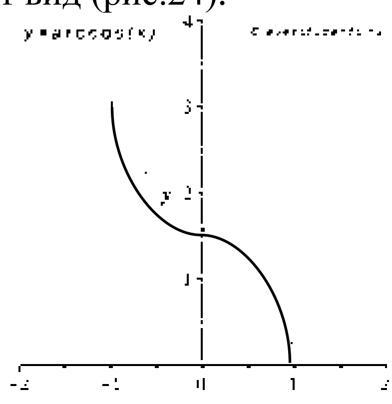


Рисунок 24 - Функция *y = arccos(x)*

Свойства функции *y = arccos(x)*.

- Область определения функции: $x\epsilon[-1;1]$.
- Область значений функции *y = arccos(x)*: $y\epsilon[0;\pi]$.
- Функция не является ни четной ни нечетной.
- Функция убывает на всей области определения, то есть, при $x\epsilon[-1;1]$.

Функция *y = arctg(x)*.

График функции имеет вид (рис.25):

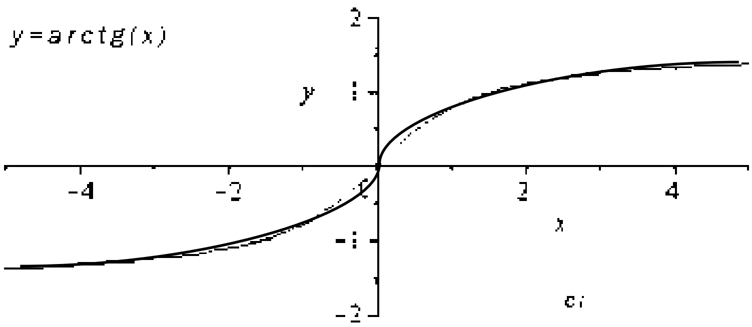


Рисунок 25 - Функция *y = arctg(x)*

Свойства функции *y = arctg(x)*.

- Область определения функции *y = arctg(x)*: $x\epsilon(-\infty;=\infty)$.
- Область значений функции: $y\epsilon(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.
- Функция - нечетная, так как $y(-x)=-y(x)$.
- Функция возрастает на всей области определения, то есть, при $x\epsilon(-\infty;+\infty)$.

Функция *y = arcctg(x)*.

Изобразим график функции на рисунке 26:

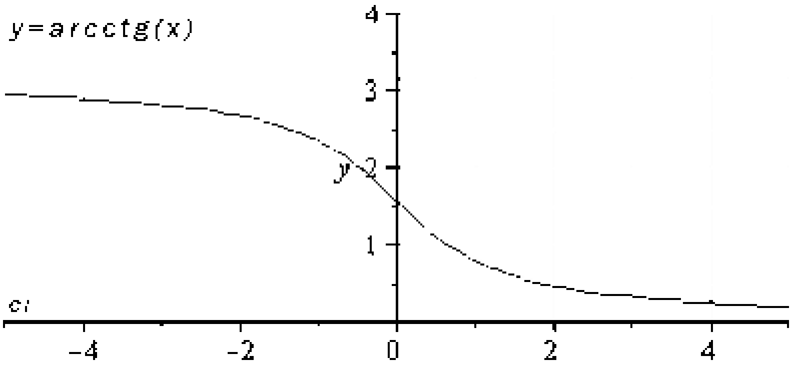


Рисунок 26 - Функция *y = arcctg(x)*

Свойства функции *y = arcctg(x)*.

- Областью определения функции является все множество действительных чисел: $x\epsilon(-\infty; +\infty)$.
- Область значений функции *y = arcctg(x)*: $y\epsilon(0; \pi)$.
- Функция не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Функция убывает на всей области определения, то есть, при $x\epsilon(-\infty; +\infty)$.

2.4 Вопросы для самопроверки

1. Дать определение понятиям функция, область определения, область значений.
2. Какая функция называется возрастающей? убывающей?
3. Назовите достаточные признаки экстремума функции.
4. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой?
5. Какова общая схема исследования функции.
6. Дайте определение постоянной функции?
7. Свойства степенной функцией?
8. Что понимается под показательной функцией?
9. График логарифмической функцией?
10. Виды тригонометрических функций?

3 ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [1], [2], [4].

3.1 Понятие предела

Пусть функция *y=f(x)* определена в окрестности точки $x = a$ (но в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена).

Число А называется ***пределом функции*** *y=f(x)* при если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех *x*, таких что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство:

$$|f(x) - A\,| < \varepsilon.$$

Если $a - \Delta < x < a + \Delta, x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < \mathrm{A} + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad .$$

Если последовательность значений аргумента $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}, \ldots$ стремится к числу $\boldsymbol{a}$, оставаясь меньше $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} < \boldsymbol{a})$, а соответствующая последовательность значений функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3), \ldots, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}), \ldots$ имеет своим пределом число A_1, то это число называют ***пределом слева*** функции $f(x)$ и обозначают $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A_1$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$.

Если же последовательность значений аргумента $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}, \ldots$ стремится к числу $\boldsymbol{a}$, оставаясь больше $\boldsymbol{a}$ $x_n > a$, а соответствующая последовательность значений функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_3), \ldots, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}), \ldots$ имеет своим пределом число A_2, то это число называют ***пределом справа*** функции $f(x)$ и обозначают $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A_2$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_2$.

Левый и правый пределы функции называют ***односторонними пределами*** (рис.27).

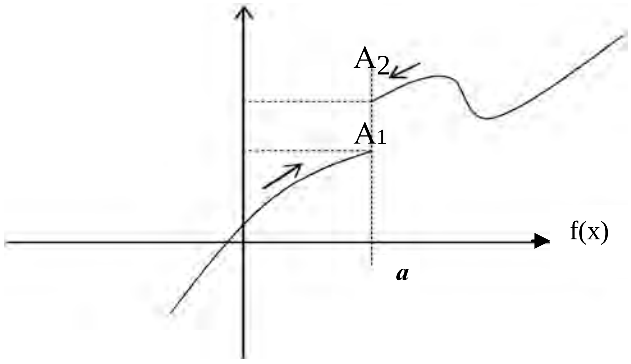


Рисунок 27 - Односторонние пределы функции

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами и обозначают обычно греческими буквами $\alpha, \beta, \ldots$ и т.д. Нуль – единственная постоянная, которая является бесконечно малой, поскольку $\lim\limits_{x \to a} 0 = 0$.

Свойства бесконечно малых величин:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин при $x \to a$ есть величина бесконечно малая при $x \to a$.
2. Произведение бесконечно малой величины при $x \to a$ на величину ограниченную (или постоянную) есть величина бесконечно малая при $x \to a$.
3. Произведение конечного числа бесконечно малых величин при $x \to a$ есть величина бесконечно малая при $x \to a$.
4. Частное от деления бесконечно малых величин при $x \to a$ не определено $\left[\frac{0}{0}\right]$.
5. Если функция $f(x)$ — бесконечно малая величина при $x \to a$, то обратная ей функция $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая величина при $x \to a$, и наоборот: если $f(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x \to a$.

Бесконечно большая величина обозначается знаком ∞. Это неограниченно возрастающая функция.

Свойства бесконечно больших величин:

1. Сумма бесконечно больших величин при $x \to a$ есть величина бесконечно большая при $x \to a$.
2. Разность бесконечно больших величин при $x \to a$ не определена и носит название неопределенности вида $[\infty - \infty]$.
3. Произведение бесконечно больших величин при $x \to a$ есть величина бесконечно большая при $x \to a$.
4. Частное от деления бесконечно больших величин при $x \to a$ не определено $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теоремы о пределах:

1. Функция может иметь только один предел при $x \to a$.

2. Предел постоянной равен самой этой постоянной: $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

3. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a}\varphi(x).$$

4. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a}\varphi(x).$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

6. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций (при условии, что $\lim\limits_{x \to a}\varphi(x) \neq 0$)

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a}\varphi(x)}.$$

Таблица пределов:

1. $[0 \cdot c] = 0$.

2. $\left[\dfrac{0}{c}\right] = 0$, где $c \neq 0$.

3. $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ — неопределенность.

4. $\left[\dfrac{c}{0}\right] = \infty$, где $c \neq 0$.

5. $[0 \cdot \infty]$ — неопределенность.

6. $[c \cdot \infty] = \infty$, где $c \neq 0$.

7. $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ — неопределенность.

8. $\left[\dfrac{c}{\infty}\right] = 0$.

9. $[\infty - \infty]$ — неопределенность.

10. $\left[\dfrac{\infty}{c}\right] = \infty$.

11. $[\infty + c] = \infty$.

3.2 Примеры вычисления пределов функций. Правила раскрытия неопределенностей

Вычисление пределов следует начинать с подстановки в выражение функции вместо переменной её предельного значения. Если в результате получается неопределённость одного из рассмотренных выше видов, то её необходимо раскрывать, используя формулы преобразования алгебраических выражений.

Пример 15. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 6}$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения аргумента $x = 2$ приводит к неопределённому выражению вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

При $x \to 2$ числитель и знаменатель дроби — бесконечно малые величины. Чтобы раскрыть такого вида неопределенность, необходимо предварительно дробь преобразовать.

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби и сократим их на $x - 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x+5}{x+3} = \frac{9}{5}.$$

Заметим, что аргумент x только стремится к своему предельному значению 2 , но не совпадает с ним. Следовательно, разность, т.е. множитель, на который мы сокращаем, отличен от нуля при $x \to 2$.

Пример 16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-3x+1}{2x^3+x^2-5}$.

Решение.

При $x\to\infty$ получаем неопределённое выражение $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Чтобы найти предел дробно-рациональной функции $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{Q(x)}$ при $x\to\infty$, необходимо предварительно числитель и знаменатель дроби разделить на x^n, где n – наивысшая степень многочленов $\mathrm{P}(x)$ и $Q(x)$.

Разделим числитель и знаменатель данной дроби на x^3 и применим основные теоремы о пределах, свойства бесконечно малых величин:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3x+1}{2x^3+x^2-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^3}{x^3}-\dfrac{3x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^3}}=\frac{3}{2}.$$

Пример 17.

$$\lim_{x\to3}\frac{\boldsymbol{x}^2-9}{\boldsymbol{x}^2-5\boldsymbol{x}+6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{(\boldsymbol{x}-3)(\boldsymbol{x}+3)}{(\boldsymbol{x}-3)(\boldsymbol{x}-2)}=\lim_{x\to3}\frac{\boldsymbol{x}+3}{\boldsymbol{x}-2}=$$

$$=\frac{6}{1}=6.$$

Решение.

Вычисляем предел отношения многочленов при $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$, когда оба многочлена стремятся к нулю и раскрываем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ путем разложения этих многочленов на множители и сокращения на $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$.

Пример 18.

$$\lim_{x\to2}\frac{2\boldsymbol{x}-4}{\sqrt{5\boldsymbol{x}-1}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{2\boldsymbol{x}-4}{\sqrt{5\boldsymbol{x}-1}-3}\cdot\frac{\sqrt{5\boldsymbol{x}-1}+3}{\sqrt{5\boldsymbol{x}-1}+3}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(\boldsymbol{x}-2)\left(\sqrt{5\boldsymbol{x}-1}+3\right)}{\left(\sqrt{5\boldsymbol{x}-1}\right)^2-3^2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(\boldsymbol{x}-2)\left(\sqrt{5\boldsymbol{x}-1}+3\right)}{5\boldsymbol{x}-1-9}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(\boldsymbol{x}-2)\left(\sqrt{5\boldsymbol{x}-1}+3\right)}{5(\boldsymbol{x}-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2\left(\sqrt{5\boldsymbol{x}-1}+3\right)}{5}=\frac{2\left(\sqrt{2\cdot 5-1}+3\right)}{5}=\frac{12}{5}$$

<u>Решение.</u>

При вычислении пределов от иррациональных функций, если получается неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, освобождаемся от иррациональности, умножая и деля на сопряженное выражение, используя формулы:

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}+\sqrt{\boldsymbol{b}}\right)\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}-\sqrt{\boldsymbol{b}}\right)=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

$$\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}\pm\sqrt[3]{\boldsymbol{b}}\right)\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{a}^2}\mp\sqrt[3]{\boldsymbol{ab}}+\sqrt[3]{\boldsymbol{b}^2}\right)=\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}.$$

<u>Пример19</u>.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\boldsymbol{x}^2-3\boldsymbol{x}+5}{4-3\boldsymbol{x}}=\frac{2\cdot 2^2-3\cdot 2+5}{4-3\cdot 2}=-\frac{7}{2}.$$

<u>Пример20</u>.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\boldsymbol{x}^2-4}{3}=\frac{2^2-4}{3}=\frac{0}{3}=0.$$

<u>Пример 21</u>.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{x}^2-3\boldsymbol{x}+1}{5\boldsymbol{x}}=\frac{0^2-3\cdot 0+1}{5\cdot 0}=\frac{1}{0}=\infty$ (Конечный предел функции не существует).

Неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ раскрываем путем деления числителя и знаменателя на высшую степень переменной:

Пример 22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+4}{6x^2+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{5x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}}{\dfrac{6x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{6+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{5-0+0}{6+0}=\frac{5}{6}.$$

Пример 23.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+1}{4x^2+5x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^3}{x^3}-\dfrac{2x^2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{4x^2}{x^3}+\dfrac{5x}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\frac{3-0+0}{0+0}=\frac{3}{0}=\infty.$$

Первый замечательный предел.

Предел вида $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (1)

называют ***первым замечательным пределом***. Он выражает отношение синуса бесконечно малого аргумента к самому этому аргументу и раскрывает неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то α и β называют **эквивалентными бесконечно малыми** при $x\to a$, и обозначаются $\alpha \approx \beta$.

Учтем, что при $x\to0$ $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$.

Пример 24.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

Пример 25.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x\cdot 1}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

Пример 26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}= \qquad =$$

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

Второй замечательный предел.

Вторым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}, \qquad (2)$$

который раскрывает неопределённость вида $\left[1^\infty\right]$.

Он может быть записан и в другом виде:

если положить $1/x=\alpha$, тогда $\alpha=1/x\to 0$,

получим $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}$,

где e — число иррациональное.

Его приближенное значение с точностью до 10^{-6} составляет $\mathrm{e}=2{,}718282\ldots$.

Пример 27.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}\cdot 4}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^4=\mathrm{e}^4.$$

Пример 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{3}{x}}=\dfrac{2}{2}=1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-3)+4}{2x-3}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}\cdot\frac{4}{2x-3}\cdot 3x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4}{2x-3}\cdot 3x}=e^{6}.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=e^{2}.$$

3.3 Непрерывность функции в точке. Точки разрыва

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если существует предел функции в этой же точке и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\,. \tag{3}$$

Равенство (2.1) означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в её окрестности;

2) существуют левый и правый пределы функции и они равны между собой:

$$\lim_{x\to x_0-}f(x)=\lim_{x\to x_0+}f(x),$$

т.е. функция $f(x)$ имеет предел при $x\to x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство (3).

Т.к. $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то равенство (3) можно записать в виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)\ .$$

Из последнего равенства следует, что при нахождении предела непрерывной функции $y = f(x)$ можно перейти к пределу под знаком функции, т.е. в функцию вместо аргумента подставить его предельное значение x_0.

Пример 29. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$.

Если хотя бы одно из трех условий непрерывности не выполняется, то функция является *разрывной в точке* x_0, а точка x_0 — называется *точкой разрыва*.

Точками разрыва первого рода называют точки, в которых левый и правый пределы конечны и существуют:

а) x_0 — ***точка устранимого разрыва***, когда левый и правый пределы равны между собой, но не равны значению функции в точке (см. рис. 29),т.е.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) \neq f(x_0).$$

Например, задана функция:

$$y = \begin{cases} x^2, & |x| > 0; \\ 1\ , & x = 0. \end{cases}$$

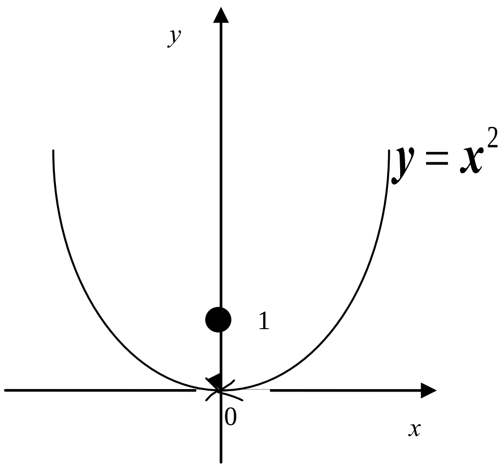


Рисунок 29 - Точка устранимого разрыва

$x_0 = 0$ — точка устранимого разрыва.

б) x_0 ***— точка конечного скачка***, когда левый и правый пределы не равны между собой (см. рис. 10), т.е.

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 +} f(x).$$

Пусть задана функция:

$$y = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ x-1\ , & x < 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0.$$

Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1, \ \lim_{x \to 0-} f(x) = -1.$$

Видим, что они не равны между собой, следовательно, $x_0 = 0$ — *точка конечного скачка*.

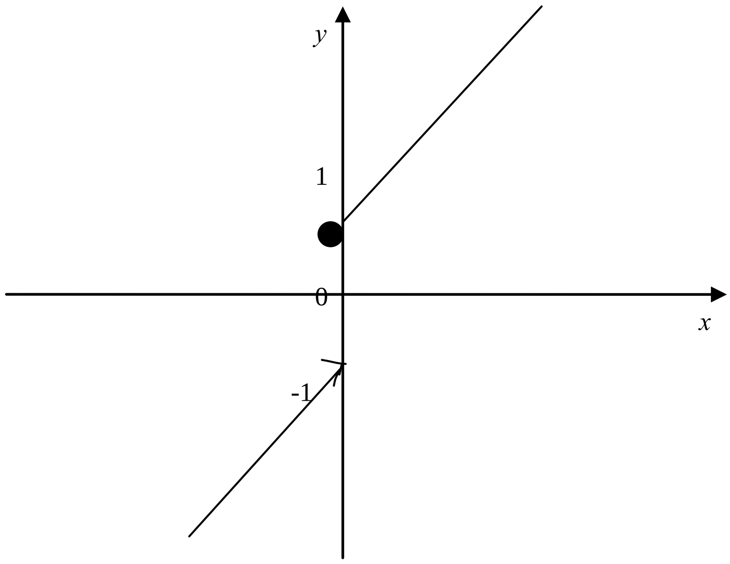


Рисунок 30 - Точка конечного скачка

Точками бесконечного разрыва второго рода называются точки, в которых один или оба односторонних предела не существуют или равны бесконечности (см. рис.31).

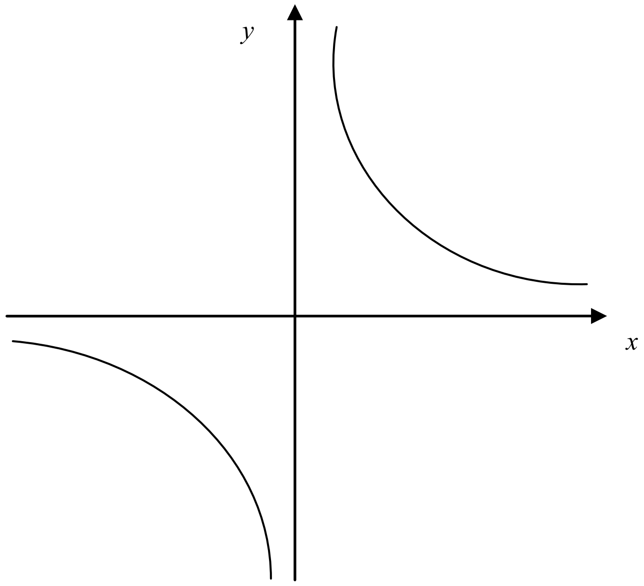


Рисунок 31 - Точка бесконечного разрыва второго рода

Пример 30. $f(x) = {}^{1}\!/_{x}$.

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$.

$x_0 = 0$ — точка бесконечного разрыва второго рода.

3.4 Вопросы для самопроверки

1. Дать определение предела функции в точке.
2. Понятие функции непрерывной в точке.
3. Перечислите основные свойства пределов.
4. Что понимается под точкой разрыва?
5. В каком случае говорят о левостороннем/правостороннем пределе функции?
6. Написать формулы 1-го и 2-го замечательных пределов.
7. Виды неопределенностей и приёмы для их раскрытия.
8. Определения бесконечно малой и бесконечно большой величин при $x \to x_0$ и $x \to \infty$. Привести графическую иллюстрацию.
9. Односторонние пределы функции в точке. Привести примеры вычисления таких пределов.
10. Описать различные условия непрерывности функции в точке и на интервале.

4 ПРОИЗВОДНАЯ. ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [3], [5].

4.1 Определение производной. Её геометрический смысл

Пусть заданы функция $y = f(x)$ и x_0 — точка из области её определения (рис.32).

Тогда ***производной функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

Наиболее употребительны следующие обозначения производной:

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx}.$$

Итак, по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;b)$ называется ***дифференцируемой*** в этом интервале, а операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

Необходимое условие дифференцируемости функции в точке: если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Выясним *геометрический смысл производной*.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (см. рис.32).

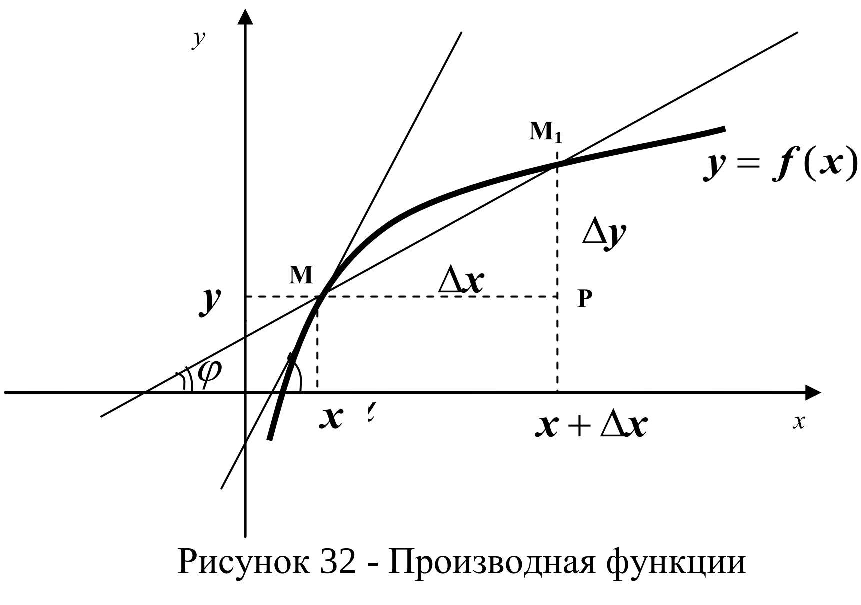


Рисунок 32 - Производная функции

Вычислим угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $\boldsymbol{M}$, т.е. величину $\boldsymbol{k} = \operatorname{tg}\alpha$.

Для этого проведем секущую через точки $\boldsymbol{MM}_1$.

Найдем угловой коэффициент секущей $\boldsymbol{k}_1 = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}$.

Пусть точка $\boldsymbol{M}_1$ неограниченно приближается по кривой $\boldsymbol{L}$ к точке $\boldsymbol{M}$, тогда $\Delta\boldsymbol{x} \to 0$, а секущая приближается к касательной.

При этом $\angle\varphi \to \angle\alpha$ и $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$.

Тогда угловой коэффициент касательной есть предел углового коэффициента секущей:

$$\boldsymbol{k} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}.$$

В правой части этого равенства стоит производная функции.

В этом и состоит её ***геометрический смысл*:** производная функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $\boldsymbol{x}$.

Запишем равенство $\boldsymbol{k} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}$ в виде:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда *уравнение касательной* к кривой $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$ имеет вид:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \tag{5}$$

а *уравнение нормали:*

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = -\frac{1}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0). \tag{6}$$

Для справок приведём основные правила и формулы дифференцирования.

4.2 Правила дифференцирования

Таблица производных:

1. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где с – любое число.

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

5. $c' = 0$.

6. $x' = 1$. $t' = 1$.

7. $(u^a)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$ *где* $a -$ любое действительное число,

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \left(u^{-1}\right)' = -\frac{u'}{u^2}. \quad \left(\sqrt{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

10. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.

11. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

12. $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$, $(e^u)' = u' \cdot e^u$.

13. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

14. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

15. $(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

16. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

17. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$.

<u>Пример 31.</u> Найти производные заданных функций:

а) $y = 2x^4 - \dfrac{5}{x^3} - 9 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 1$;

б) $y = \dfrac{\ln 10x}{x^3 - 1}$;

в) $y = \sqrt{e^x - 6x}$.

Решение.

а) Вводя дробные и отрицательные показатели, будем иметь $y = 2x^4 - 5x^{-3} - 9x^{\frac{2}{3}} + 1$. Применяя правила дифференцирования суммы (2), формулу дифференцирования степенной функции (7) и формулу дифференцирования постоянной (5), получаем:

$$y' = 2 \cdot 4x^3 - 5 \cdot (-3)x^{-4} - 9 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 8x^3 + \frac{15}{x^4} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) применяя правило дифференцирования дроби (4), получим:

$$y' = \frac{(\ln 10x)'(x^3 - 1) - \ln 10x (x^3 - 1)'}{(x^3 - 1)^2}.$$

При этом по формуле (7):

$$(x^3 - 1)' = 3x^2,$$

а по формуле (13):

$$(\ln 10x)' = \frac{1}{10x}(10x)' = \frac{1}{10x} \cdot 10 = \frac{1}{x}.$$

Отсюда:

$$y' = \frac{\frac{1}{x}(x^3 - 1) - (\ln 10x) \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{1}{x(x^3 - 1)} - \frac{3x^2 \ln 10x}{(x^3 - 1)^2}.$$

в) под знаком производной имеем сложную функцию вида $y = \sqrt{u}$, где $u = e^x - 6x$ — промежуточный аргумент. Используя формулу (7), получим:

$$y' = \left(\sqrt{e^x - 6x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{e^x - 6x}} \cdot \left(e^x - 6x\right)'.$$

Далее, применяя формулы (1), (12), найдем

$$\left(e^x - 6x\right)' = e^x - 6.$$

Тогда

$$y' = \frac{e^x - 6}{2\sqrt{e^x - 6x}}.$$

Производная сложной функции:

Пусть задана сложная функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\varphi(\boldsymbol{x}))$ с промежуточным аргументом $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}$. Тогда производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}'_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{u}'_{\boldsymbol{x}}. \qquad (7)$$

Пример32. *Найти производную функции* $\boldsymbol{y} = \sin^2 \boldsymbol{x}$.

Решение. Данная функция является сложной степенной функцией $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}^2$, промежуточным аргументом которой служит $\boldsymbol{u} = \sin \boldsymbol{x}$.

Поэтому, дифференцируя по формуле (3.1) и формулам 7, 8 таблицы, получим:

$$\boldsymbol{y}' = 2\sin^1 \boldsymbol{x} \cdot (\sin \boldsymbol{x})' = 2\sin \boldsymbol{x} \cdot \cos \boldsymbol{x} = \sin 2\boldsymbol{x}.$$

Пример 33. *Найти производную функции* $\boldsymbol{y} = \operatorname{tg}\sqrt{\boldsymbol{x}}$.

Решение. Функция является сложной вида $\boldsymbol{y} = \operatorname{tg} \boldsymbol{u}$, промежуточным аргументом которой служит $\boldsymbol{u} = \sqrt{\boldsymbol{x}}$.

Дифференцируя по формуле (7) и формулам 7, 10 таблицы, получим:

$$\boldsymbol{y}' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{\boldsymbol{x}}} \cdot \left(\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{x}} \cdot \cos^2 \sqrt{\boldsymbol{x}}}.$$

Производная неявной функции:

Если y есть ***неявная функция*** от x, т.е. задана уравнением $F(x,y)=0$, не разрешенным относительно y, то для нахождения её производной y' нужно продифференцировать по x обе части равенства, помня, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное равенство относительно y'.

Пример34. *Найти производную функции, заданной уравнением*
$e^x + x\cdot y^2 + y^3 = 0$.

Решение. Продифференцируем обе части уравнения, считая y функцией, зависящей от x.

Получим:

$$\left(e^x\right)' + x'y^2 + x\left(y^2\right)' + \left(y^3\right)' = 0,$$

$$e^x + y^2 + 2x\cdot y\cdot y' + 3y^2\cdot y' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{e^x + y^2}{2xy + 3y^2}.$$

Дифференциал функции:

Из определения производной $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и понятия предела следует $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где α — бесконечно малая величина.

Выразив из этого равенства приращение функции, получим

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x\ .$$

Если $y' \neq 0$, то в правой части последнего равенства первое слагаемое линейно относительно Δx, а второе слагаемое – бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем первое, поэтому при малых значениях Δx приращение функции можно заменить его главной частью $y'\Delta x$, т.е.

$$\Delta y \approx y'\Delta x.$$

Эту главную часть приращения функции называют *дифференциалом* данной функции в точке и обозначают:

$$dy = y'\Delta x \text{ или } dy = y'dx. \qquad (8)$$

Пример 35.

Найти дифференциал функции $y = x^5$.

Применяя формулу (3.2) и формулу 7 таблицы, находим

$dy = 5x^4 dx.$

Производные высших порядков:

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то её производная называется ***производной второго порядка*** функции $y = f(x)$ и обозначается:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Производной n - го порядка называется производная от производной $(n-1)$ - го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \qquad (9)$$

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках, например, y^V или $y^{(5)}$.

Пример 36. Найти производную четвертого порядка от функции $y = e^{2x}$.

Решение. Применяя формулу (8) получим

$y' = 2e^{2x}$,

$y'' = 4e^{2x}$,

$y''' = 8e^{2x}$,

$y^{(4)} = 16e^{2x}$.

4.3 Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется дифференцируемой?
2. Как называется операция нахождения производной?
3. Дать определение производной функции в точке.
4. Геометрический смысл производной функции в точке?
5. Как найти угловой коэффициент касательной к графику функции?
6. Чему равна производная степенной функции?
7. Чему равна производная сложной функции?
8. Формулы производной тригонометрических функций?
9. Как называются точки, в которых производная равна нулю?
10. В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции?

5 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [1], [3], [4].

5.1 Достаточные условия возрастания и убывания функции на отрезке

Если производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка (a, b), то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

Точка x_0 есть точка ***максимума*** для функции $y = f(x)$, если для любой точки x, принадлежащей некоторой окрестности $\delta(x_0)$, выполняется неравенство:

$$f(x) < f(x_0),\ \ x \in \delta(x_0),\ x \neq x_0 .$$

Точка x_0 есть точка ***минимума,*** если $f(x) > f(x_0)$, $x \in \delta(x_0)$, $x \neq x_0$.

Необходимое условие существования экстремума:

Если в точке x_0 дифференцируемая функция имеет экстремум, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются ***критическими***.

Критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

Достаточные условия существования экстремума:

Теорема 1. Если при переходе через критическую точку x_0 производная дифференцируемой функции меняет знак, то точка x_0 — точка экстремума. Если знак меняется с «+» на «¯», то x_0 — точка максимума, а если с «–» на «+», то — точка минимума.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема, x_0 — её критическая точка, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 есть точка экстремума: максимума, если $f''(x_0) < 0$; минимума, если $f''(x_0) > 0$.

5.2 Достаточные условия выпуклости графика функции

График дифференцируемой функции называется выпуклым вверх в интервале (a, b), если в этом интервале он расположен ниже любой своей касательной, кроме точки касания (см. рис. 33).

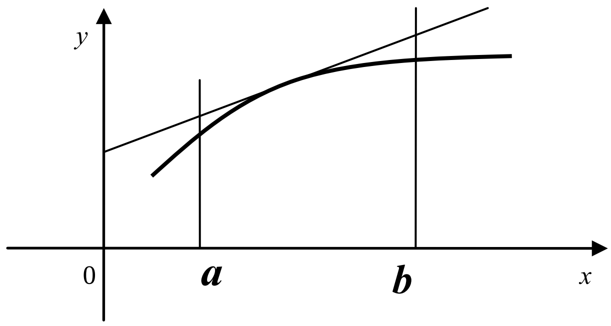


Рисунок 33 - Выпуклость вверх графика функции

График дифференцируемой функции называется выпуклым вниз на интервале (a, b), если на этом интервале он расположен выше любой своей касательной, кроме точки касания (см. рис. 34).

Если для функции $y = f(x)$, дважды дифференцируемой во всех точках интервала (a, b), $f''(x_0) < 0$, то кривая $y = f(x)$ выпукла вверх в этом интервале; если $f''(x_0) > 0$ во всех точках интервала (a, b), то кривая $y = f(x)$ выпукла вниз в этом интервале.

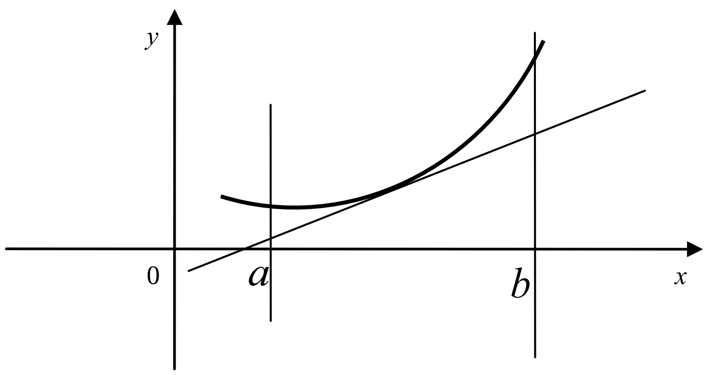


Рисунок 34 - Выпуклость вниз графика функции

Точка графика непрерывной функции, в которой изменяется характер выпуклости, называется ***точкой перегиба*** (см. рис. 35).

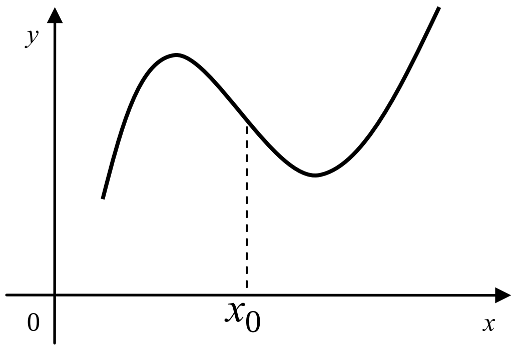


Рисунок 35 - Точка перегиба

Необходимое условие существования точки перегиба:

Вторая производная дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке перегиба x_0 равна нулю, т.е.

$$f''(x_0) = 0.$$

Достаточное условие существования точки перегиба:

Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, т.е. $f''(x_0) = 0$, и при переходе через эту точку меняет свой знак, то точка x_0 есть точка перегиба её графика.

5.3 Общая схема исследования функции

1. Находим область определения функции, т.е. значения аргумента, при которых функция $y = f(x)$ принимает действительные значения.
2. Исследуем функцию на четность, нечетность.

Помним, что для *четной* функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, и график её будет симметричен относительно оси Oy; для *нечетной* функции — $f(-x) = -f(x)$, и график её будет симметричен относительно начала координат.

3. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Определяем интервалы непрерывности функции и точки разрыва (если они существуют). При этом помним, что элементарные функции непрерывны в тех точках, в которых они определены.

5. Находим вертикальные асимптоты, если существуют точки бесконечного разрыва. Исследуем поведение графика функции $y = f(x)$ слева и справа от этих точек, для чего вычисляем односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$.

6. Исследуем поведение функции в бесконечности, находим наклонные асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx).$$

Если хотя бы один из этих пределов не является конечным, то график функции не имеет наклонных асимптот.

7. Находим интервалы возрастания, убывания функции и точки экстремума.

8. Определяем интервалы выпуклости графика и точки перегиба.

9. Строим график функции.

<u>Пример 37</u>. *Исследовать функцию* $y = x^3 - 6x^2 + 9$ *и построить её график.*

<u>Решение.</u>

1. Область определения функции: $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, т.к.

$f(-x) = -x^3 - 6x^2 + 9$, т.е. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

3. Найдем точку пересечения графика с осью Oy, приравнивая x к нулю: $y(0) = -0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 = 9$.

4. Интервалом непрерывности служит вся числовая прямая $(-\infty, \infty)$.

5. Т.к. точек разрыва функция не имеет, то вертикальных асимптот нет.

6. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид:

$y = kx + b$,

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 9}{x} = \infty,$$

Следовательно, наклонной асимптоты нет.

7. Интервалы монотонности и точки экстремума найдем по первой производной:

$$y'(x) = 3x^2 - 12x = 0,$$

$$3x(x - 4) = 0,$$

$$x_1 = 0, \; x_2 = 4.$$

Исследуем знак производной слева и справа от критических точек:

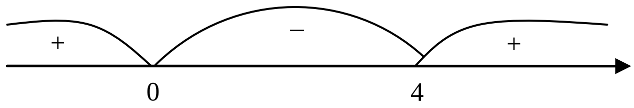


Рисунок 36 - Исследование возрастание/убывание

При переходе через точки производная меняет знак, следовательно, $\boldsymbol{x} = 0$ — точка максимума, а $\boldsymbol{x} = 4$ — точка минимума функции.

8. Интервалы выпуклости и точку перегиба определяем по второй производной:

$\boldsymbol{y}'' = 6\boldsymbol{x} - 12,\ 6\boldsymbol{x} - 12 = 0,\ x = 2.$

Исследуем знак второй производной слева и справа от точки $x = 2$:

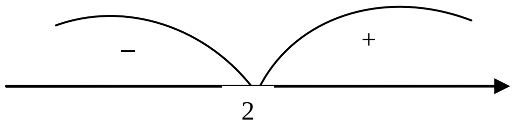


Рисунок 37 - Исследование выпуклости/вогнутости

Т.к. при переходе через точку $\boldsymbol{x} = 2$ вторая производная меняет знак, то эта точка является точкой перегиба.

9. По полученным данным строим график функции (см. рис.38)

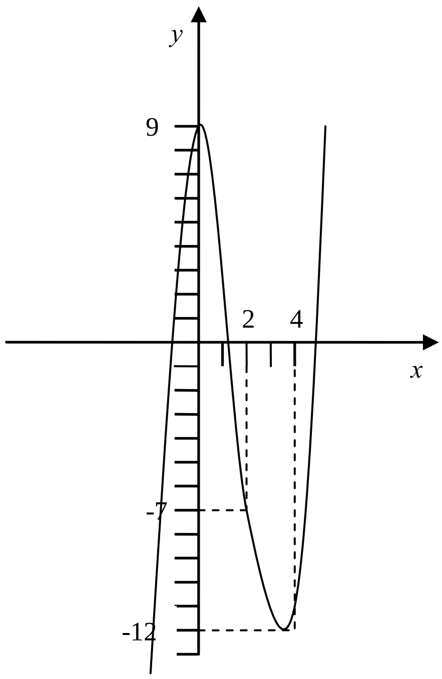


Рисунок 38 - График функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^3 - 6\boldsymbol{x}^2 + 9$

5.4 Вопросы для самопроверки

1. Какая зависимость называется функцией?
2. Дать определение понятиям область определения, область значений?
3. Какая функция называется возрастающей?
4. Назовите необходимые условия существования экстремума функции.
5. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой?
6. Назовите схему исследования функции и построения ее трафика.
7. Сформулируйте достаточное условие существования перегиба функции.
8. Какая функция называется убывающей?
9. Сформулируйте достаточное условие выпуклости вниз/вверх функции.

6 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [4], [3], [5].

6.1 Первообразная функции. Неопределенный интеграл, его свойства

Задачей дифференциального исчисления являлось нахождение для каждой функции её производной.

Поставим обратную задачу: для данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна $f(x)$.

Например, для функции $f(x)=x^3$ этому условию удовлетворяет функция $F(x)=\frac{x^4}{4}$, т.к.

$$F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=\frac{1}{4}\cdot 4x^3=x^3=f(x).$$

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** *функции* $f(x)$ на интервале (a,b), если для любого $x\in(a,b)$ выполняется равенство:

$$F'(x)=f(x) \text{ или } dF(x)=f(x)dx.$$

Множество всех первообразных $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается:

$$\int f(x)dx .$$

Таким образом, по определению:

$$\int f(x)dx=F(x)+C , \tag{10}$$

где C – произвольная постоянная, $\int$ – знак неопределённого интеграла.

Свойства неопределённого интеграла:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
3. $\int d\,F(x) = F(x) + C$;
4. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$;
5. $\int \left(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right)dx =$

$= \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$;

6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = u(x)$ есть непрерывная функция от x.

Таблица основных неопределённых интегралов:

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

$\int e^x dx = e^x + C$;

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
9. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$;
10. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$;
11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a + x}{a - x}\right| + C$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

6.2 Основные методы интегрирования

1. Метод непосредственного интегрирования.

Метод основан на применении свойств неопределенного интеграла и использовании таблицы основных интегралов.

Пример 38. $\int \left(4\sqrt{x} + 6x^2 - \frac{3}{x} \right) dx$.

Решение. Применяя свойства 4, 5 и формулы таблицы получим:

$$\int \left(4\sqrt{x} + 6x^2 - \frac{3}{x} \right) dx = 4\int \sqrt{x}dx + 6\int x^2 dx - 3\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 3\ln|x| + C = \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + 2x^3 - 3\ln|x| + C.$$

Пример 39. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Решение. Представим числитель подынтегральной дроби, равный единице, в виде $\sin^2 x + \cos^2 x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

2. Метод замены переменной.

Метод замены переменной (подстановкой) при нахождении неопределенного интеграла $\int f(x)dx$ состоит в применении формулы:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \qquad (11)$$

После нахождения интеграла в правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования $\boldsymbol{t}$ назад к $\boldsymbol{x}$.

Пример40. $\int e^{\frac{x}{5}}\,dx$.

Решение. Обозначим $x = 5t$, тогда $dx = 5dt$, следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{5}}\,dx = 5\int e^{t}\,dt = 5e^{t} + C = 5e^{\frac{x}{5}} + C.$$

Пример 41. $\int x\sqrt{x+4}\,dx$.

Решение. Пусть $\sqrt{x+4} = t$, тогда $x = t^2 - 4$, $dx = 2t\,dt$, следовательно:

$$\int x\sqrt{x+4}\,dx = \int \left(t^2 - 4\right)\cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int \left(t^2 - 4\right)t^2\,dt =$$

$$= 2\int \left(t^4 - 4t^2\right)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{4t^3}{3}\right) + C =$$

$$= \frac{2(x+4)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4(x+4)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Пример 42. $\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

Решение. Пусть $1 + \operatorname{tg} x = t$, тогда $dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$,

следовательно

$$\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\operatorname{tg} x)^3} + C.$$

Пример 43. $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$.

Решение. Пусть $2 + \ln x = t$, тогда $dt = \frac{dx}{x}$, следовательно,

$$\int \frac{dx}{x(2+\ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|2 + \ln x| + C.$$

Пример 44. Вычислить $\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx$;

Решение. Предварительно преобразуем подинтегральную функцию и затем применим свойства неопределённого интеграла и формулу (3) из таблицы интегралов:

$$\int\left(4x^3-\sqrt{x}+\frac{6}{x^2}\right)dx = \int\left(4x^3-x^{\frac{1}{2}}+6x^{-2}\right)dx = =$$

$$4\int x^3dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int x^{-2}dx=4\frac{x^4}{4}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+6\frac{x^{-1}}{-1}+c= =$$

$$x^4-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{6}{x}+c.$$

Пример 45. Вычислить $\int\frac{4x^2dx}{x^3+5}$;

Решение. Воспользуемся подстановкой $u=x^3+5$, тогда $du=3x^2dx$, откуда $x^2dx=du/3$. Таким образом,

$$\int\frac{4x^2dx}{x^3+5}=4\int\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{3}=\frac{4}{3}\int\frac{du}{u}=\frac{4}{3}\ln|u|+c==\frac{4}{3}\ln\left|x^3+5\right|+c.$$

При вычислении неопределённого интеграла, полученного в результате замены переменной, мы пользовались формулой (4) таблицы интегралов.

Пример 46. Вычислить $\int\sin^2 x\cos x\,dx.$

Решение. В неопределённом интеграле выполним замену $u=\sin x$, чтобы привести его к табличному виду. Тогда $du=\cos x\,dx$. Получим:

$$\int\sin^2 x\cos x\,dx=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+c=\frac{\sin^3 x}{3}+c.$$

При вычислении неопределённого интеграла $\int u^2du$ была использована формула (3) таблицы.

3. Метод интегрирования по частям.

В дифференциальном исчислении была получена формула дифференциала произведения двух функций:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Интегрируя это равенство, получим:

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (12)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*. Она дает возможность свести вычисление $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, которой может оказаться существенно более простым, чем исходный. Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

- В интегралах вида

$$\int P(x)e^{kx}\,dx,\ \int P(x)\sin kx\,dx\ ,\ \int P(x)\cos kx\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, k — число, удобно положить $u = P(x)$, а за dv — все остальные сомножители подынтегрального выражения.

- В интегралах вида

$$\int P(x)\arcsin x\,dx,\ \int P(x)\arccos x\,dx,\ \int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx,$$
$$\int P(x)\ln x\,dx$$

удобно положить $P(x)dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

Пример 48.

$$\int xe^{2x}dx.$$

Решение. Пусть $u = x$, $dv = e^{2x}dx$,

тогда

$$du = dx,\ v = \int dv = \int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2},$$

следовательно, по формуле (12):

$$\int xe^{2x}dx = x\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int\frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

Пример 49. $\int x \ln x \, dx$.

Решение. Пусть $u = \ln x$, $dv = xdx$,

тогда

$$du = \frac{dx}{x},\; v = \frac{x^2}{2},$$

следовательно, по формуле (4.1):

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Интегрирование простейших иррациональных выражений.

Интегралы вида $\int R\left(\sqrt[m]{x^p}, \sqrt[n]{x^s}\right)dx$ берутся подстановкой $x = t^k$, где k — наименьшее общее кратное чисел (m, n). С помощью этой подстановки избавляемся от иррациональности.

Пример 50. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Решение. Введем подстановку $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^5 dt}{t^2(t+1)} = 6\int \frac{t^3 dt}{(t+1)} = 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}dt =$$

$$= 6\int\left(\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 6\frac{t^3}{3} - 6\frac{t^2}{2} + 6t - 6\ln|t+1| + C = = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C$$

.

6.3 Понятие определенного интеграла

Определенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Таким образом, если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функция для $f(x)$, то, согласно определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,. \tag{13}$$

Равенство (13) называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Разность $F(b) - F(a)$ кратко записывают $F(x)\Big|_a^b$.

Тогда, формулу (5.1) можно записывать и так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b\,.$$

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, где $c \in [a, b]$;
4. $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$;
5. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))\,dx =$

$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)dx$.

Методы вычисления определённого интеграла:
1. Метод непосредственного интегрирования

Метод основан на применении формулы Ньютона-Лейбница (13) и свойств определённого интеграла.

Пример 51. $\int\limits_{o}^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$.

2. Интегрирование заменой переменной.

Если: а) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha, \beta]$;

б) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[a, b]$;

в) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (14)$$

Пример 52. *Вычислить* $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Положим $\sqrt{x} = t$, тогда $dx = 2t\,dt$. Если $x \in [0,4]$, то $t \in [0,2]$.

Получим:

$$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int\limits_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int\limits_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}dt = 2\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt =$$
$$= 2\left[t - \ln|1+t|\right]\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3.$$

3. Метод интегрирования по частям.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то имеет место формула:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du\ . \qquad (15)$$

Пример 53. *Вычислить* $\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx$.

Решение. Введем замену $u = x$, $dv = \sin x\,dx$,

тогда $du = dx$, $v = -\cos x$.

Применяя формулу (15), получим:

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx =$$

$$= (-\pi(-1) + 0) + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi .$$

6.4 Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

Условимся приписывать площади криволинейной трапеции знак плюс, если трапеция расположена выше оси Ox, и — знак минус, если трапеция расположена ниже оси Ox.

Тогда определённый интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a,b]$ оси Ox, кривой $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 19). В этом состоит ***геометрический смысл определенного интеграла***. Поэтому с помощью определённого интеграла вычисляют площади криволинейных фигур:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx . \qquad (16)$$

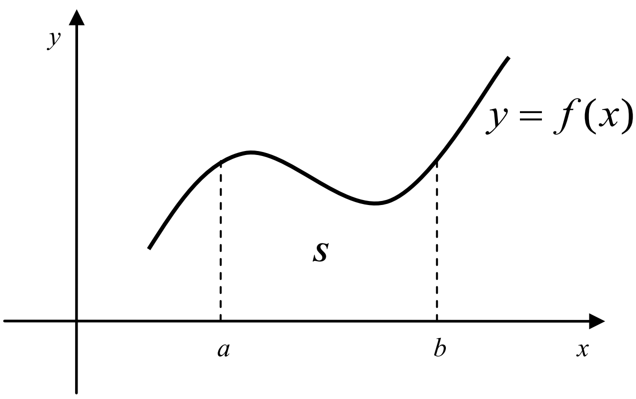


Рисунок 39 – Геометрический смысл определенного интеграла

Пример 54. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции* $y = \sqrt{x}$, *осью абсцисс и прямой* $x = 4$.

Решение. Искомая фигура — криволинейная трапеция (рис. 40), площадь которой:

$$\boldsymbol{S}=\int_0^4\sqrt{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{dx}=\int_0^4\boldsymbol{x}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{dx}=\frac{2}{3}\boldsymbol{x}^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{2}{3}\boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x}}\Bigg|_0^4=\frac{16}{3}\text{ (кв.ед.).}$$

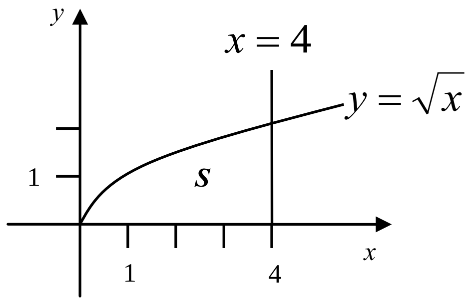


Рисунок 40 - Площадь криволинейной трапеции

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})$, прямыми $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ (при условии $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})\ge\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$) можно найти по формуле:

$$\boldsymbol{S}=\int_a^b\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}-\int_a^b\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}=\int_a^b(\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{dx}. \qquad (17)$$

<u>Пример 55</u>**.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$ и прямой $y-x-3=0$.

<u>Решение.</u> Площадь фигуры, ограниченной сверху непрерывной кривой $y=f(x)$, снизу — непрерывной кривой $y=\varphi(x)$, слева — прямой $x=a$, справа — прямой $x=b$, вычисляется по формуле (17).

Найдем точки пересечения заданных параболы и прямой. Составим и решим систему их уравнений:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}(x+3)^2 \\ y-x-3=0 \end{cases}.$$

Подставив в первое уравнение системы вместо y сумму $x+3$, получим:

$$\frac{1}{3}(x+3)^2=(x+3),\quad (x+3)^2=3x+9,\quad x^2+6x+9-3x-9=0,$$

$$x^2+3x=0,\quad x(x+3)=0.$$

Отсюда, $x_1 = -3$; $x_2 = 0$. Следовательно, $y_1 = 0$; $y_2 = 3$. Таким образом, парабола и прямая пересекаются в точках $A(-3,0)$ и $B(0,3)$.

Из формулы (17) следует, что площадь фигуры равна

$$S = \int_{-3}^{0}\left[(x+3) - \frac{1}{3}(x+3)^2\right]dx = \int_{-3}^{0}\left[x+3-\frac{1}{3}x^2 - 2x - 3\right]dx =$$

$$= \int_{-3}^{0}\left[-\frac{1}{3}x^2 - x\right]dx = \left(-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0} = \left(-\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{0} =$$

$$= \left(-3 - \frac{9}{2}\right) = 1{,}5.$$

Следовательно, искомая площадь равна 1,5 кв. ед. Рассмотренная фигура изображена на рисунке.

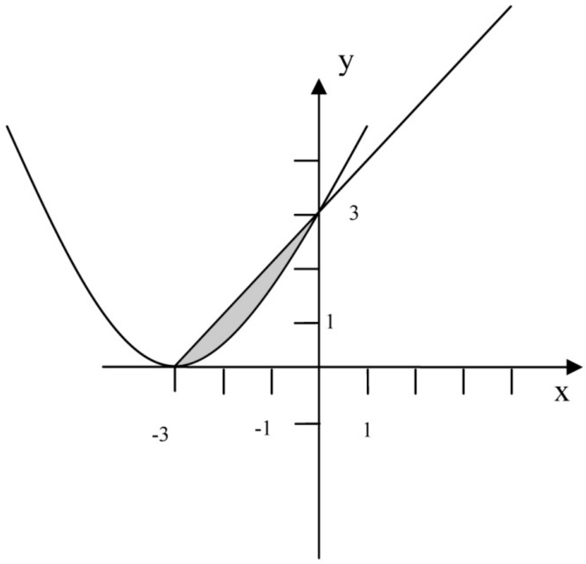


Рисунок 41 - Иллюстрация примера 55

6.5 Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом функции?
3. Назовите основные методы интегрирования?
4. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
5. Что называется определенным интегралом функции?
6. Формула Ньютона-Лейбница для нахождения определенного интеграла.
7. Геометрический смысл определенного интеграла.
8. Что такое верхний и нижний пределы интегрирования?

7 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [4], [1], [3].

7.1 Понятие функции нескольких переменных

Многим явлениям, в том числе и экономическим, присуща многогранная зависимость. Исследование таких зависимостей требует совершенствования математического аппарата, в частности, введения понятия функции нескольких переменных.

Если каждой паре (x,y) значений двух независимых друг от друга, переменных величин x и y, из некоторой области их изменения D, соответствует определенное значение величины z, то говорят, что задана ***функция z двух независимых переменных*** x и y, определенная в области D.

Многим явлениям возникающим, в том числе в технике, естествознании и экономике, свойственна многофакторная зависимость. Исследование таких зависимостей потребовало совершенствование математического аппарата, в частности, введения понятия функции нескольких переменных.

Примерами функций двух и нескольких переменных могут служить: площадь S прямоугольника со сторонами x и y , выражаемая формулой

$S = xy$, т.е. значения S определяются совокупностью значений x и y.

Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами x , y и z , выражаетсяформулой $V = xyz$, т.е. значения V зависят от трех переменных.

Обычно функция нескольких переменных задается явным аналитическим способом. Например: z=3x+5y2,u=xy+z2 и т.д. Встречается также и неявное задание таких функций, например: z-2x-sinxy=0. Упорядоченная пара чисел (x,y) может рассматриваться как точка на плоскости, т.е. Z есть функция точки (x,y).

Для того чтобы задать функцию $z = f(x, y)$, необходимо не только указать правило нахождения z по заданным x и y, но и то множество (называемое областью задания функции) пар значений, которые могут принимать аргументы x и y.

Например, функция z = $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2-4x^2}}$ задана только при 1–y>0, т.е. внутри эллипса y2+4x2<1 с полуосями, a=0,5 и в=1 не включая точки, лежащие на эллипсе.

Если каждой совокупности значений переменных x,y,z…n соответствует определенное значение переменной w, то w называется ***функцией независимых переменных x,y,z…n*** и записывается w=f (x,y,z…).

Для функции трех переменных областью определения является упорядоченная тройка чисел (x,y,z), т.е. некоторая совокупность точек пространства. Область определения функции четырех и большего числа переменных не допускает простого геометрического истолкования.

Функции двух переменных допускают графическую иллюстрацию. Графиком функции $z = f(x, y)$, заданной на некотором множестве D точек плоскости XOY, называется множество точек (x,y,z) пространства, у которых (x,y) принадлежит D, а $z = f(x, y)$.

В наиболее простых случаях такой график представляет собой некоторую поверхность.

Например, графиком функции z=4-x2-y2 является параболоид.

Функции трех и большего числа переменных не имеют геометрического представления.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x, y, z) аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональным соотношением $z = f(x, y)$.График функции двух переменных z = f (x, y) представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

Как правило, построение поверхности оказывается довольно трудной задачей и поверхность обладает меньшей наглядностью, чем линия на плоскости. В связи с этим оказывается удобным геометрически описывать функцию двух переменных, не выходя в трехмерное пространство. Средством такого описания являются линии уровня.

Линией уровня $z = c$ функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется линия на плоскости $f(x, y) = c$. В каждой точке, лежащей на этой линии, функция $z = f(x, y)$ принимает значение, равное c. Число c в этом случае называется ***уровнем***.

Обычно берут арифметическую прогрессию чисел c_i с постоянной разностью h; тогда по взаимному расположению линий уровня можно получить представление о форме поверхности, описываемой функцией $z = f(x, y)$. Там, где функция изменяется быстрее, линии уровня сгущаются, а там, где поверхность пологая, линии уровня располагаются реже.

Многие примеры линий уровня хорошо известны. Например, параллели и меридианы на глобусе – это линии уровня функций широты и долготы. Синоптики публикуют карты с изображением изотерм – линий уровня температуры. Линиями уровня обозначают глубину морей и высоту гор на географических картах.

Поверхностью уровня $u = c$ *функции* $u = f(x, y, z)$ называется поверхность $f(x, y, z) = c$, в точках которой функция $u = f(x, y, z)$ сохраняет значение, равное c.

Придавая, постоянной *c,* различные числовые значения, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня.

Непрерывность функции нескольких переменных:

Число А есть предел функции f(M), где $M(x_1,x_2,\dots x_n)$ точка n-мерного пространства, при стремлении точки M к точке $M_0(x_{10},x_{20},\dots x_{n0})$ любым образом, если для всякого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что из условия $|MM_0| < \delta$, где - расстояние между точками M и M_0, следует $|f(x_1,x_2,\dots x_n) - A| < \varepsilon$.

Обозначается: $A = \underset{M \to M_0}{Lim} f(M) = \underset{\substack{x_1 \to x0_1 \\ x_2 \to x0_2 \\ x_n \to x0_n}}{Lim} f(x_1, x_2, x_n)$

Пусть $z = f(x, y)$. Придадим x и y приращения Δx и Δy. Получим приращение функции $z = f(x, y)$.

Если $\underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{Lim} \Delta z = 0$ (1) т.е. бесконечно малым аргументам соответствует бесконечно малое приращение функции, то говорят, что функция непрерывна.

Распишем $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y+\Delta y)$ - f (x_0,y_0) (1) и положим $x_0+\Delta x=x, y_0+\Delta y = 0$, то выражение (1) можно записать в виде $f(x,y)=f(x_0,y_0)$(2), где непрерывность функции означает, что ее предел равен значению от пределов аргументов.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в области. Если в некоторой точке не выполняется второе условие, то эта точка называется точкой разрыва.

7.2 Частные производные

Зададим аргументу x приращение Δx, аргументу y - приращение Δy, функция z получит наращенное значение $f(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$. Тогда величина $\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)$ будет называться полным приращением функции в точке $(x,\ y)$. Если задать только приращение аргумента x или только приращение аргумента y, то полученные приращения функции соответственно $\Delta_x z = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y)$ и $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x,\ y)$ называются частными.

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Частная производная обозначается одним из символов $z'_x,\ z'_y$ *или* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *или* $f'_{\text{X}}(x,\ y),\ f'_y(x,\ y)$..

Для функции $z = f(x,\ y)$ по определению

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x},\ z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} \quad (18)$$

Геометрический смысл частных производных двух переменных:

Значение частной производной по x в некоторой точке равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к сечению данной поверхности $z = f(x,\ y)$ плоскостью $y = y_0$.

Пусть график функции $z = f(x,\ y)$ представляет собой некоторую поверхность М.

Тогда при $y = y_0$ мы получаем кривую f_x сечение этой поверхности соответствующей плоскостью.

Итак, производная z'_x в этом случае будет численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой f_x, в заданной точке (x_0, y_0), т.е. $z'_x(x_0, y_0) = \cos\alpha$, где α угол наклона касательной к оси ox. По аналогии рассматриваем $z'_y(x_0, y_0) = \cos\beta$.

При нахождении частной производной мы можем рассматривать соответствующую функцию, как функцию первой переменной полагая, что остальные переменные сохраняют постоянные значения, т.е. являются const.

Частные производные высших порядков:

Частной производной второго порядка от функции, $z = f(x,\ y)$ дифференцируемой в области D, называется первая производная от соответствующей частной производной.

Рассматривая частные производные от них, получим всевозможные частные производные 3 порядка: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ и т.д.

***Существует теорема*:** Если все входящие частные производные рассматривать как функции своих независимых переменных, непрерывны, то результат частного дифференцирования не будет зависеть от порядка дифференцирования.

Пример 56. Задана функция двух переменных $z = x^2 + \cos y$. Найти частные производные второго порядка.

Решение. Найдем частную производную функции z по переменной x, при этом y будет считаться постоянной величиной. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x{}' = \left(x^2 + \cos y\right)_x{}' = \left(x^2\right)_x{}' + \left(\cos y\right)_x{}' = 2x + 0 = 2x.$$

Чтобы найти частную производную второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, продифференцируем первую частную производную еще раз по переменной x, при этом y будет по-прежнему считаться постоянной величиной. Находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(z'_x\right)'_x = (2x)'_x = 2.$$

Найдем частную производную функции z по переменной y, при этом x будет считаться постоянной величиной. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(x^2 + \cos y\right)'_y = \left(x^2\right)'_y + \left(\cos y\right)'_y = 0 - \sin y = -\sin y.$$

Чтобы найти частную производную второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, продифференцируем первую частную производную еще раз по переменной y, при этом x будет по-прежнему считаться постоянной величиной. Находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-\sin y\right)'_y = -\cos y.$$

Применение частных производных:

Уравнения, в которые входят частные производные, называются дифференциальными уравнениями в частных производных. Они широко известны в физике, инженерии, экономике и других науках и дисциплинах.

Например: Объём V конуса зависит от высоты h и радиуса r, согласно формуле $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

Частная производная объема V относительно радиуса r $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2\pi r\ h}{3}$ показывает скорость, с которой изменяется объем конуса, если его радиус меняется, а высота остается неизменной.

Например, если считать единицы измерения объема m^3 а измерения длины m, то вышеуказанная производная будет иметь размерность скорости измерения объема $\frac{m^3}{m}$, т.е. изменение величины радиуса на 1м будет соответствовать изменению объема конуса на $\frac{2\pi r h}{3}$.

Частная производная относительно h $\frac{\partial v}{\partial h}=\frac{\pi r^2}{3}$, которая показывает скорость, с которой изменяется объем конуса, если его высота меняется, а его радиус остается неизменным.

Частные производные нашли так же широкое применение в сфере экономики. Они используются при решении задач оптимального планирования, при определении эластичности спроса предложения.

Дифференциал функции нескольких переменных:

Произведение частной производной на приращение соответственной независимой переменной называется ***частным дифференциалом.***

$\frac{du}{x}=\frac{\partial u}{\partial x}\partial u$ аналогично находим частный дифференциал по y.

Полный или просто дифференциал функции нескольких переменных равен сумме произведений частных производных этой функции на дифференциалы соответствующих независимых переменных:

$$dz=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\,.$$

Функция $z=f(x,\ y)$ называется **дифференцируемой в точке (*x, y*),** если ее полное приращение может быть представлено в виде $\Delta z=dz+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$, где dz – дифференциал функции, $\alpha=\alpha(\Delta x,\ \Delta y),\ \beta=\beta(\Delta x,\ \Delta y)$ - бесконечно малые при $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$.

Таким образом, дифференциал функции нескольких переменных, как и в случае одной переменной, представляет главную, линейную относительно приращений, часть полного приращения функции.

Следует отметить, что для функции одной переменной $y=f(x)$ существование конечной производной и представление приращения функции в виде $\Delta y=dy+\alpha(\Delta x)\Delta x$, являются равнозначными утверждениями, и любое из них можно взять за определение дифференцируемости функции.

Для функции нескольких переменных дело обстоит иначе: существование частных производных является лишь необходимым, но недостаточным условием дифференцируемости функции. Следующая теорема выражает достаточное условие дифференцируемости двух переменных.

***Теорема*:** если частные производные функции $z'_y(x,y)$ существуют в окрестности точки (*x, y*) и непрерывны в самой точке (*x, y*), то функция будет дифференцируема в этой точке.

Пример 57. Найти полный дифференциал функции $z = x^3 y^2$

Решение. Сначала найдем частные производные z'_x и z'_y. Для заданной функции будем иметь: $z'_x = 3x^2y^2$, $z'_y = 2x^3y$.

Тогда найдем полный дифференциал функции: $dz = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$.

7.3 Экстремум функции нескольких переменных

Точка $M(x_0, y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

Точка $M(x_0, y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M, такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$

Обращаем внимание на *локальный* характер экстремума (максимума и минимума) функции, так как речь идет о максимальном и минимальном значении лишь в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0).

Теорема 1. Необходимое условие экстремума.

Если функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Градиентом функции $z = f(M)$, в точке $M(x, y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, взятыми в точке $M(x, y)$

$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j;\ |grad\ f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$, где i, j, k – координатные орты.

Пример 58**:** Дана функция $z = x^2 + y^2$

Решение. Определим градиент в точке $M(1,1)$.

Выражение градиента этой функции в произвольной точке будет

$grad\ z = 2xi + 2yj.$

Следовательно, $(\boldsymbol{grad\,z})_M = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $|\boldsymbol{grad\,z}|_M = 2\sqrt{3}$.

Следствие 1. Пусть функция нескольких переменных $z = f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум. Тогда:

- если в точке (x_0, y_0) определен градиент функции, то он равен нулю $\boldsymbol{grad}\ f(x_0, y_0) = 0$;
- если функция дифференцируема в точке (x_0, y_0), то $df(x_0, y_0) = 0$.

Из следствия 1 вытекает, что точки экстремума функции нескольких переменных $z = f(x,y)$ надо искать либо среди точек, в которых $\boldsymbol{grad}\ f(x\ \ ,y) = 0$ (т.е. среди ***стационарных точек функции***), либо среди точек, в которых градиент не определен (не существует одна или несколько частных производных).

Все точки, в которых градиент функции равен нулю или не определен, называют точками, подозрительными на экстремум, или ***критическими точками функции***.

Прежде, чем это сделать, введем понятия частных производных второго порядка.

Если частные производные $z'_x = f'_x(x,y)$ и $z'_y = f'_y(x,y)$ сами являются дифференцируемыми функциями, то можно найти также и их частные производные, которые называются *частными производными второго порядка.*

Вычислив частные производные функции $z'_x = f'_x(x,y)$, то получим $z''_{xx} = f''_{xx}(x,y)$ и $z''_{yx} = f''_{yx}(x,y)$.

Аналогично можно определить две частные производные функции $z'_y = f'_y(x,y)$, которые обозначаются $z''_{xy} = f''_{xy}(x,y)$ и $z''_{yy} = f''_{yy}(x,y)$.

Можно доказать, что *если частные производные второго порядка функции* $z = f(x,y)$ *непрерывны в точке* (x_0, y_0), *то в этой точке* $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Теперь мы сможем сформулировать достаточное условие экстремума.

Теорема 2. Достаточное условие экстремума функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x,y)$:

- определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой $f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0;$

- имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка $f''_{xx}(x_0,y_0)=A;\ f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)=B;\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C.$

Тогда, если $\Delta=AC-B^2>0$, то в точке (x_0,y_0) функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум, причем если $A<0$ – максимум, если $A>0$ – минимум.
В случае $\Delta=AC-B^2<0$, то функция $z=f(x,y)$ экстремума не имеет.
Если $\Delta=AC-B^2=0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

План исследования функции двух переменных на экстремум.

1) найти частные производные функции z'_x и z'_y;
2) решить систему уравнений $z'_x=0,\ z'_y=0$ и найти критические точки функции;
3) найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов;
4) найти экстремумы функции.

Пример 59**.** Найти стационарные точки функции

$z=y^3+2x^2-12xy+4x-12y+2$

Решение:

1. Найдем частные производные данной функции. Получаем:

$z'_x=4x-12y+4,\quad z'_y=3y^2-12x-12.$

2. Для отыскания координат стационарных точек получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}4x-12y+4=0\\ 3y^2-12x-12=0\end{cases}$$

3. Решаем систему уравнений. Для этого выражаем x из 1–го уравнения: $x=3y-1$ и подставляем во 2–е уравнение. Получаем $y^2-12y=0$.

Это уравнение имеет корни $y_1=0$ и $y_2=12$. Соответствующие значения x: $x_1=-1$, $x_2=35$.

Стационарные точки функции $(-1,\ 0)$ и $(35,\ 12)$.

Пример 60. Исследовать на экстремум функцию

$z=x^3+3xy^2-15x-12y$

Решение:

1. Находим частные производные данной функции. Получаем:

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad z'_y = 6xy - 12$$

2. Для отыскания координат стационарных точек получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

3. Решаем систему уравнений. Для этого выражаем $\boldsymbol{x}$ из 2–го уравнения $x = 2/y$ и подставляем в 1–е уравнение. Получаем:

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0; \ \left(y^2\right)^2 - 5y^2 + 4 = 0; \ \left(y^2 - 1\right)\left(y^2 - 4\right) = 0$$

Это уравнение имеет корни $y_1 = 1,\ y_2 = -1,\ y_3 = 2$ и $y_4 = -2$.

Соответствующие значения x: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Стационарные точки: $M_1\,(2, 1)$, $M_2\,(-2, -1)$, $M_3\,(1, 2)$, $M_4\,(-1, -2)$.

4. Проверяем выполнение достаточных условий экстремума в стационарных точках. Для этого находим частные производные 2–го порядка: $z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = 6y, z''_{yy} = 6x.$

- Вычисляем значения частных производных 2–го порядка в стационарной точке $M_1(2, 1)$. Получаем: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$. Отсюда $AC - B^2 = 144 - 36 > 0$ и, следовательно, в точке M_1 экстремум есть. Так как $A > 0$, то в точке $M_1\,(2, 1)$ функция имеет минимум.

- Вычисляем значения частных производных 2–го порядка в стационарной точке $M_2\,(-2, -1)$. Получаем: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$. Отсюда $AC - B^2 = 144 - 36 > 0$ и, следовательно, в точке M_2 экстремум есть. Так как $A < 0$, то в точке $M_1\,(-2, -1)$ функция имеет максимум.

- Вычисляем значения частных производных 2–го порядка в стационарной точке $M_3\,(1, 2)$. Получаем: $A = 6$, $B = 12$, $C = 6$. Отсюда $AC - B^2 = 36 - 144 < 0$ и, следовательно, в точке M_3 функция экстремума не имеет.
- Вычисляем значения частных производных 2–го порядка в стационарной точке $M_4\,(-1, -2)$. Получаем: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$. Отсюда $AC - B^2 = 36 - 144 < 0$ и, следовательно, в точке M_4 функция экстремума не имеет.

7.4 Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение функции двух независимых переменных. Приведите примеры.
2. Что называется областью определения функции двух независимых переменных?
3. Что называется частным и полным приращением функции двух независимых переменных?
4. Сформулируйте определение предела функции двух переменных.
5. Какая функция называется непрерывной в точке / в области?
6. Дайте определение частных производных первого порядка функции двух переменных.
7. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных?
8. Как найти частные производные второго порядка функции двух переменных?
9. Что является необходимым условием экстремума функции двух переменных?
10. Сформулируйте достаточный признак экстремума функции двух переменных.

8 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ИХ РЕШЕНИЕ

При изучении данного раздела рекомендуется использовать литературные источники [3], [2], [4].

8.1 Понятие о дифференциальном уравнении

При решении различных задач математики, физики, химии и других дисциплин часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и её производные (или дифференциалы) различных порядков. Такие уравнения называются *дифференциальными*. Мы будем рассматривать только те дифференциальные уравнения, искомая функция в которых зависит от одной переменой. Такие дифференциальные уравнения называются ***обыкновенными.***

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, содержащейся в нем.

Пример 61. $y''' - 3y'' + 2y = 0$ — дифференциальное уравнение третьего порядка.

В общем виде *дифференциальное уравнение* n*-го порядка* можно записать так:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = 0. \tag{19}$$

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение n-го порядка в решении содержит n произвольных постоянных. Такое решение называется *общим решением* дифференциального уравнения или *общим интегралом*

Частным решением дифференциального уравнения называется такое его решение, в котором произвольным постоянным приданы конкретные числовые значения, т.е. заданы *начальные условия*. Количество их совпадает с порядком дифференциального уравнения. Для дифференциального уравнения n-го порядка должно быть задано n начальных условий:

$$y_{x=x_0} = y_0\ ,\ y'_{x=x_0} = y'_0\ ,\ y''_{x=x_0} = y''_0\ ,\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}_{x=x_0} = y^{(n-1)}_0\ .$$

Отыскание решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши*.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

Дифференциальное уравнение называется ***уравнением с разделяющимися переменными,*** если оно имеет вид:

$$f_1(x)\cdot\varphi_2(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_1(y)dy=0, \qquad (20)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — функции только переменной x, а $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — функции только переменной y.

Поделив обе части уравнения (5.1) на произведение $\varphi_2(y)\cdot f_2(x)$, после сокращения получим:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy.$$

Видим, что левая часть уравнения зависит только от x, а правая – только от y, т.е. переменные разделены. Левую часть уравнения (5.2) можно рассматривать как дифференциал некоторой функции $F(x)$ переменной x, т.е. $F(x)$ — первообразная для $f_1(x)/f_2(x)$. Следовательно,

$$F(x)=\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx.$$

Аналогично,

$$\Phi(x)=-\int\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy.$$

Равенство дифференциалов функций означает, что сами функции отличаются на постоянное слагаемое, т.е.

$$F(y)=\Phi(y)+C$$

или

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\int\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dy+C \qquad (21)$$

Пример 63. *Решить уравнение*

$$y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения. Разделим обе части уравнения на $x \cdot y \neq 0$:

$$\frac{y\cdot(1+x)}{xy}dx + \frac{x\cdot(1-y)}{xy}dy = 0,$$

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0,$$

$$\int\frac{1+x}{x}dx = -\int\frac{1-y}{y}dy,$$

$$\int\frac{1}{x}dx + \int dx = -\int\frac{1}{y}dy + \int dy,$$

$$\ln|x| + x + C = -\ln|y| + y,$$

$$\ln|x| + x + C + \ln|y| - y = 0,$$

$$\ln|xy| + x - y + C = 0.$$

Пример 64. *Найти решение уравнения* $y' = -\dfrac{y}{x}$, *удовлетворяющее условию* $y(4) = 1$.

Решение. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Разделим переменные:

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$y = \frac{C}{x}.$$

Получили общее решение дифференциального уравнения. Подставим оба условия $x = 4$ и $y = 1$ в общее решение. Получаем:

$$1 = \frac{C}{4},\ C = 4,$$

тогда $y = \dfrac{4}{x}$ — частное решение уравнения $y' = -\dfrac{y}{x}$.

8.2 Вопросы для самопроверки

1. Как в общем виде можно записать дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными? Сформулируйте метод его интегрирования.

2. Дайте определение однородной функции степени $m > 0$ и степени $m = 0$.

3. Какое уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка?

4. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

5. В чем заключается метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) интегрирования линейного дифференциального уравнения первого порядка?

6. Сформулируйте метод Бернулли (разделения переменных) для интегрирования линейного уравнения.

9 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ТЕСТЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

9.1 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №1

1) 1.1. Найти меру множества: $((2,7) \cap (5,8)) \cup [10,12)$

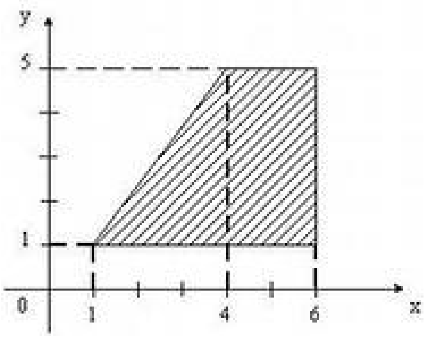
1.2. Найти меру множества: $(-2,3] \cup [1,\ 2]$

1.3. Найти меру множества: $(4,9) \cup (6,7)$

1.4. Найти меру множества: $[0,5] \cap (1,4)$

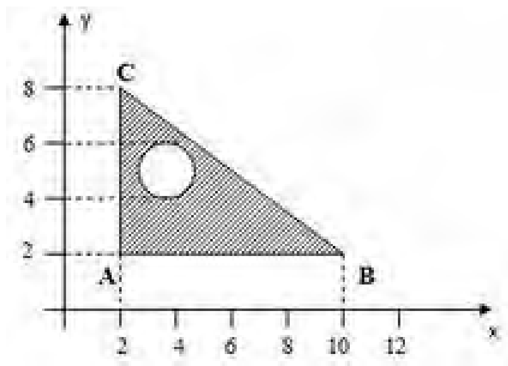
1.5. Найти меру множества: $[1,4] \cup ((-5,0) \cap (-2,3))$

2) 2.1. Найти меру заштрихованного множества.



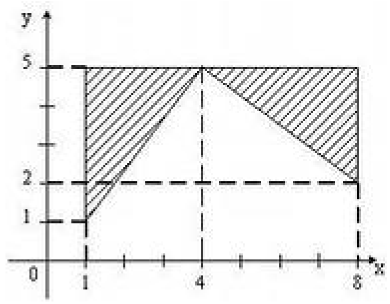
1) 14   2) 16   3) 18

2.2. Найти меру заштрихованного множества.



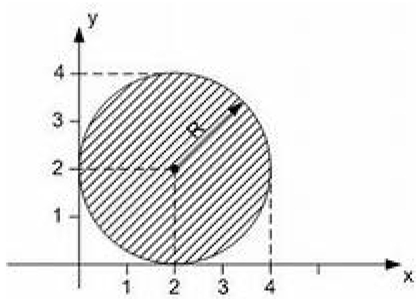
1) $24-\pi$ 2) 24 3) $24+\pi$

2.3. Найти меру заштрихованного множества.



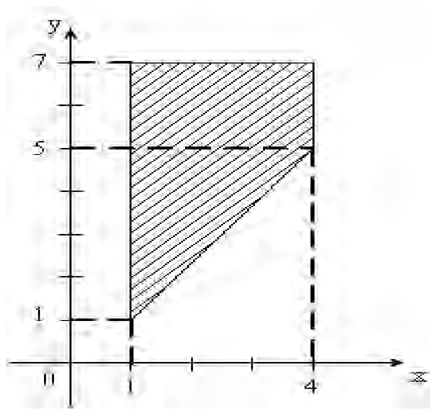
1)8 2) 10 3) 12

2.4. Найти меру заштрихованного множества.



1) 2π 2) 3π 3) 4π

2.5. Найти меру заштрихованного множества.



1)15 2) 20 3) 28

3) 3.1. Справедливо ли равенство

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
1) да
2) нет

3.2. Справедливо ли равенство
$A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$
1) да
2) нет

3.3. Справедливо ли равенство
$(A \cap B) \cup (A \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
1) да
2) нет

3.4. Справедливо ли равенство
$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
1) да
2) нет

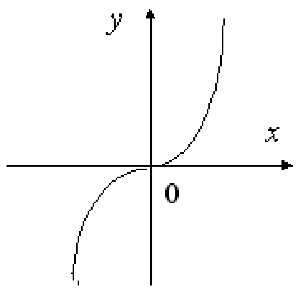
3.5. Справедливо ли равенство
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (C \cup B)$
1) да
2) нет

9.2 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №2

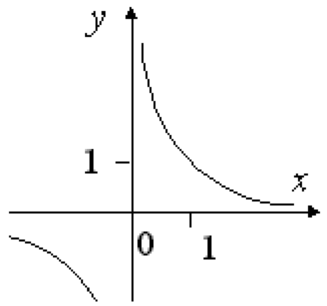
1) Выбрать правильный ответ.

1.1. Графиком функции $y=x^3$ служит:

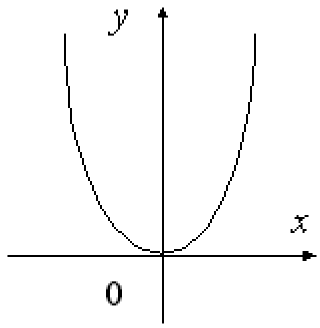
а)



b)

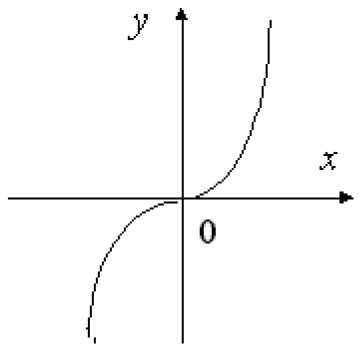


c)

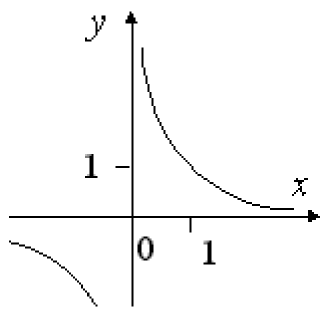


1.2. Графиком функции y= $\frac{1}{x}$ служит:

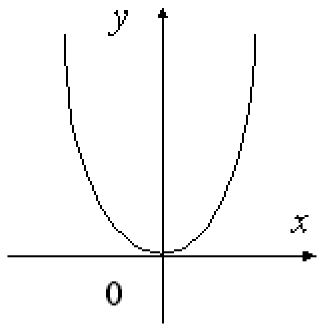
a)



b)

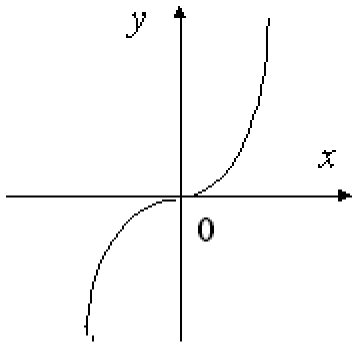


c)

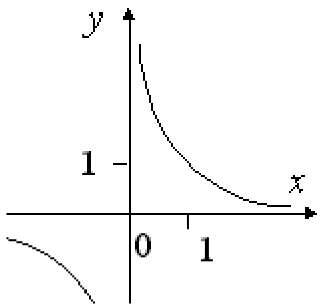


1.3. Графиком функции $y=x^2$ служит:

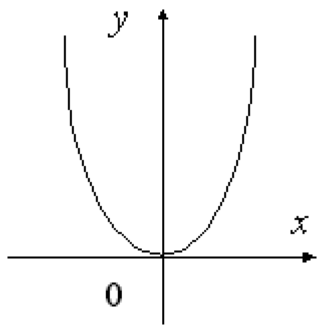
a)



b)

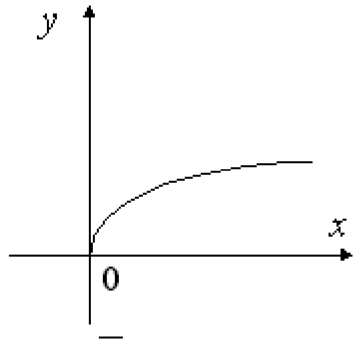


c)

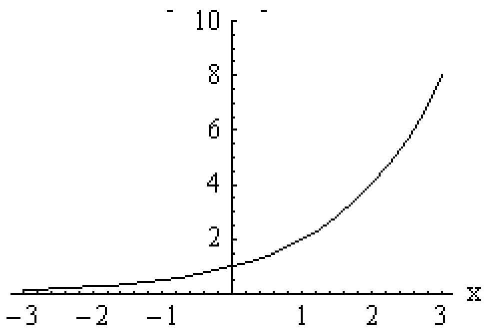


1.4. Графиком функции y=$\sqrt{x}$ служит:

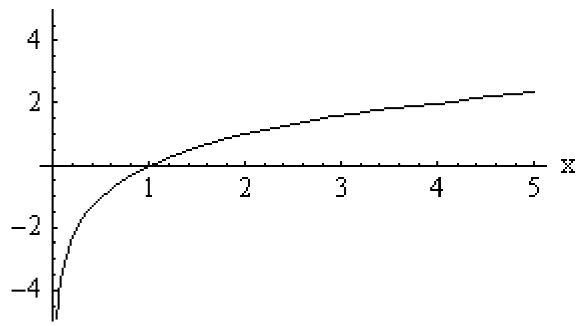
a)



b)

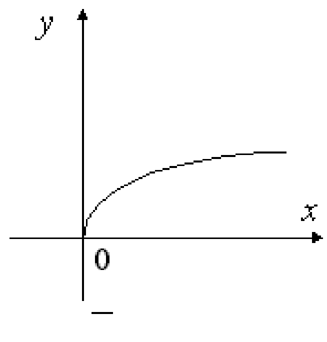


c)

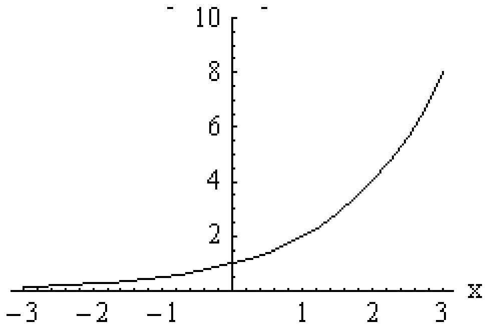


1.5. Графиком функции y=a^x служит:

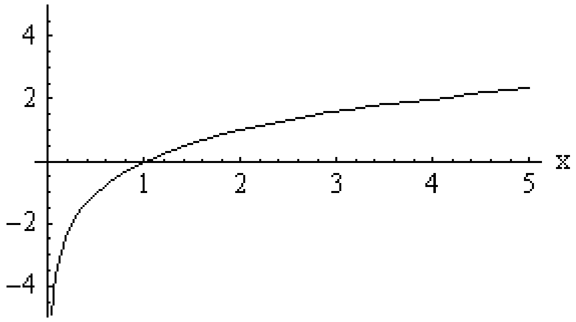
a)



b)

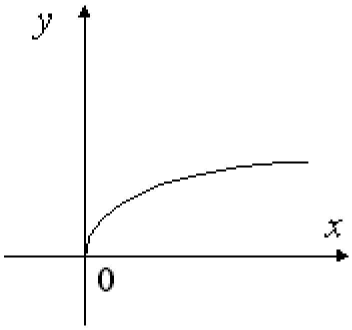


c)

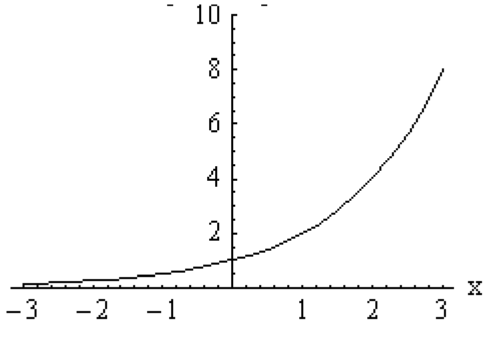


1.6. Графиком функции y=$\log_a x$ служит:

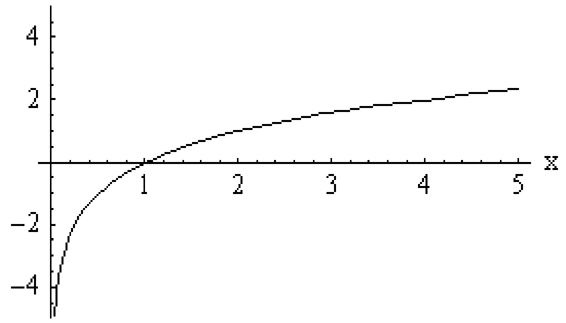
a)



b)



c)



2) 2.1. Среди перечисленных функций четной функцией является:

a) $y = -3x^2 - \sin x$;

b) $y = 4x^4 - 3x^2 - 6$;

c) $y = \sin 4x$;

d) $y = \sqrt{x}$.

2.2. Областью определения функции $y = \sqrt{2x - 6}$ является промежуток:

a) $(-\infty; 3]$;

b) $(-\infty; 3)$;

c) $[3; +\infty)$.

2.3. Областью определения функции $y = \sqrt{5x - 10}$ является промежуток:

a) $(2; +\infty)$;

b) $(-\infty; 2]$;

c) $(-\infty; 2)$;

d) $[2; +\infty)$.

2.4. Число точек разрыва функции $y = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ равно:

a) 3;

b) 4;

c) 1;

d) 0.

2.5. Областью определения функции $y = \sqrt{2x - 6}$ является промежуток:

a) $(3;+\infty)$;
b) $(-\infty;3]$;
c) $(-\infty;3)$;
d) $[3;+\infty)$.

9.3 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №3

1. Вычислить указанные пределы:

1.1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{4}{x}}$.

1.2. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$.

1.3. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{x+\sqrt[3]{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{arctg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

1.4. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{2x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{x^3+x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}6x}{\mathrm{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{2x}$.

1.5. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2-5x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\mathrm{ctg}2x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$.

1.6. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8+2x-x^2}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+3}{x^3+2x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{x}$.

1.7. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x+x^2}{2x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^x$.

1.8. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{2x}$.

1.9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^3+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$.

1.10. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+2}{x^3-x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)^x$.

1.11. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{4}{x}}$.

1.12. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$.

1.13. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{x+\sqrt[3]{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{arctg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

1.14. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{2x}$.

1.15. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{4x^3+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$.

1.16. а) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{x^3-x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^{x}$.

1.17. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{7x^2+8x+1}{2x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^3+x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}6x}{\mathrm{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{5x-3}\right)^{2x}$.

1.18. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{4x^2-5x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\mathrm{ctg}2x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$.

1.19. а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{8+2x-x^2}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+3}{x^3+2x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x}$.

1.20. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x+1}{2x^2+3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x+x^2}{2x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\mathrm{tg}4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x}$.

9.4 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №4

1. Найти производные заданных функций:

1.1 а) $y=3x^4-\frac{5}{3x^3}-9\sqrt[3]{x^2}-1$; б) $y=\frac{3x^5+7}{\mathrm{ctg}\,2x}$; в) $y=(2+\cos x)^3$;

1.2. а) $y=2x^5-\dfrac{1}{3x^3}+4\sqrt[4]{x}+3$; б) $y=\dfrac{x+3}{\sin 2x}$; в) $y=\sqrt{(\operatorname{tg} x)}$;

1.3. а) $y=5x^6-\dfrac{3}{2x^4}+8\sqrt[4]{x^3}-7$; б) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\operatorname{tg} x}$; в) $y=\left(e^x-2\right)^5$;

1.4. а) $y=2x^3-\dfrac{2}{x^6}+3\sqrt[3]{x^2}+5$; б) $y=\dfrac{4x}{\sin 3x}$; в) $y=\left(4-\sqrt[5]{x}\right)^2$;

1.5. а) $y=4x^2-\dfrac{5}{6x^6}+10\sqrt[5]{x^4}-2$; б) $y=\dfrac{e^{8x}}{\sqrt{x+1}}$; в) $y=(\sin x-4)^3$;

1.6. а) $y=x^5+\dfrac{1}{2x^2}-4\sqrt{x}+3$; б) $y=\dfrac{\arcsin 6x}{x+3}$; в) $y=(\ln x)^5$;

1.7. а) $y=3x^5-\dfrac{2}{3x^3}+6\sqrt[3]{x^2}-9$; б) $y=\dfrac{x^2+4}{\cos 7x}$; в) $y=\left(5-2\sqrt{x}\right)^4$;

1.8. а) $y=4x^2-\dfrac{3}{x^2}+5\sqrt[5]{x^3}+6$; б) $y=\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1-x^3}$; в) $y=\sqrt[3]{(3+4x)}$;

1.9. а) $y=3x+\dfrac{4}{x^3}-3\sqrt[3]{x^2}-4$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\ln 3x}$; в) $y=\left(3x-e^x\right)^2$;

1.10. а) $y=5x^2-\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}+8$; б) $y=\dfrac{e^{4x}}{x^2+1}$; в) $y=\sqrt[5]{(1+\cos x)}$.

1.11. а) $y=2x^5-\dfrac{1}{3x^3}+4\sqrt[4]{x}+3$; б) $y=\dfrac{x+3}{\sin 2x}$; в) $y=\sqrt{(\operatorname{tg} x)}$;

1.12. а) $y=5x^6-\dfrac{3}{2x^4}+8\sqrt[4]{x^3}-7$; б) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\operatorname{tg} x}$; в) $y=\left(e^x-2\right)^5$;

1.13. а) $y=2x^3-\dfrac{2}{x^6}+3\sqrt[3]{x^2}+5$; б) $y=\dfrac{4x}{\sin 3x}$; в) $y=\left(4-\sqrt[5]{x}\right)^2$;

1.14 а) $y=3x^4-\dfrac{5}{3x^3}-9\sqrt[3]{x^2}-1$; б) $y=\dfrac{3x^5+7}{\operatorname{ctg} 2x}$; в) $y=(2+\cos x)^3$;

1.15. а) $y=4x^2-\dfrac{3}{x^2}+5\sqrt[5]{x^3}+6$; б) $y=\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1-x^3}$; в) $y=\sqrt[3]{(3+4x)}$;

1.16. а) $y=3x+\dfrac{4}{x^3}-3\sqrt[3]{x^2}-4$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\ln 3x}$; в) $y=\left(3x-e^x\right)^2$;

1.17. а) $y = 5x^2 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + 8$; б) $y = \frac{e^{4x}}{x^2 + 1}$; в) $y = \sqrt[5]{(1 + \cos x)}$.

1.18. а) $y = 4x^2 - \frac{5}{6x^6} + 10\sqrt[5]{x^4} - 2$; б) $y = \frac{e^{8x}}{\sqrt{x+1}}$; в) $y = (\sin x - 4)^3$;

1.19. а) $y = x^5 + \frac{1}{2x^2} - 4\sqrt{x} + 3$; б) $y = \frac{\arcsin 6x}{x + 3}$; в) $y = (\ln x)^5$;

1.20. а) $y = 3x^5 - \frac{2}{3x^3} + 6\sqrt[3]{x^2} - 9$; б) $y = \frac{x^2 + 4}{\cos 7x}$; в) $y = \left(5 - 2\sqrt{x}\right)^4$;

2. Найти производные второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$ данных функций.

2.1 $y = x^2 \ln x$.

2.2. $y = \mathrm{e}^{4x}$.

2.3. $y = \mathrm{e}^{-3x}$.

2.4. $y = \mathrm{e}^{-5x}$.

2.5. $y = x^3 \mathrm{e}^{x}$.

2.6. $y = \mathrm{e}^{3x-2}$.

2.7. $y = \mathrm{e}^{-3x}$.

2.8. $y = \frac{x}{1+x}$.

2.9. $y = \frac{x-1}{x+2}$.

2.10. $y = \ln(2x+1)$.

2.11. $y = \ln(1 - x^2)$.

2.12. $y = \frac{1}{x^2}$.

2.13. $y = \mathrm{e}^{1-4x}$.

2.14. $y = x^2 \sin x$.

2.15. $y = \cos(2x - 5)$.

2.16. $y = \frac{3}{x^4}$.

2.17. $y = \frac{1}{x^3}$.

2.18. $y = \cos 2x$.

2.19. $y = \cos(3x + 7)$.

2.20. $y = \frac{2}{x^3}$.

2.21. $y = \frac{6}{x^2}$.

2.22. $y = \cos(4x - 1)$.

3. Написать уравнения касательной и нормали к кривой в точке с абсциссой x_0.

3.1 $y = \cos x$, $x_0 = \pi/2$.

3.12. $y = \cos x$, $x_0 = -\pi/2$.

3.2. $y=\sin x$, $x_0=0$.

3.3. $y=x^2-4$, $x_0=1$.

3.4. $y=\operatorname{arcctg} x$, $x_0=0$.

3.5. $y=\operatorname{ctg} x$, $x_0=\pi/2$.

3.6. $y=x^2-9$, $x_0=-2$.

3.7. $y=\frac{1}{x}$, $x_0=1$.

3.8. $y=x^2-2x$, $x_0=-1$.

3.9. $y=\sqrt{x}$, $x_0=1$.

3.10. $y=x^2-x$, $x_0=0$.

3.11. $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=8$.

3.13. $y=x^2-4$, $x_0=-1$.

3.14. $y=\arcsin x$, $x_0=0$.

3.15. $y=\operatorname{tg} x$, $x_0=0$.

3.16. $y=x^2-9$, $x_0=2$.

3.17. $y=\arccos x$, $x_0=0$.

3.18. $y=\frac{1}{x}$, $x_0=-1$.

3.19. $y=x^2-2x$, $x_0=0$.

3.20. $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1$.

3.21. $y=\sin x$, $x_0=-\pi$.

3.21. $y=x^2-3x$, $x_0=0$.

9.5 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №5

Исследовать данную функцию и построить её график. Исследование предусматривает нахождение точек экстремума и интервалов возрастания и убывания функции, нахождение точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости графика.

1.1. $y=-\frac{1}{6}x^3+\frac{9}{2}x+2;$

1.2. $y=\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{21}{8}x-1;$

1.3. $y=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{2}x^2-4;$

1.4. $y=\frac{1}{21}x^3+\frac{2}{7}x^2-3x+\frac{1}{3};$

1.5. $y=-\frac{1}{2}x^3+6x-1;$

1.6. $y=\frac{1}{15}x^3-\frac{1}{5}x^2-3x-2;$

1.7. $y=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{8}x^2+3x-6;$

1.8. $y=\frac{1}{10}x^3-\frac{3}{5}x^2-\frac{63}{10}x+3;$

1.9. $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-2;$

1.10. $y=\frac{1}{30}x^3-\frac{1}{10}x^2-\frac{3}{2}x+1;$

1.11. $y=-\frac{1}{2}x^3+6x-1;$

1.12. $y=\frac{1}{15}x^3-\frac{1}{5}x^2-3x-2;$

1.13. $y=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{8}x^2+3x-6;$

1.14. $y=\frac{1}{10}x^3-\frac{3}{5}x^2-\frac{63}{10}x+3;$

1.15. $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-2;$

1.16. $y=\frac{1}{30}x^3-\frac{1}{10}x^2-\frac{3}{2}x+1;$

1.17. $y=-\frac{1}{6}x^3+\frac{9}{2}x+2;$

1.18. $y=\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{21}{8}x-1;$

1.19. $y=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{2}x^2-4;$

1.20. $y=\frac{1}{21}x^3+\frac{2}{7}x^2-3x+\frac{1}{3}.$

9.6 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №6

1. Найти указанные неопределённые интегралы.

1.1. а) $\int\left(3+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx;$ б) $\int\frac{x^2dx}{x^4+3};$ в) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\cdot dx;$

1.2. а) $\int\left(7x-\frac{4}{x^5}+3\sqrt[6]{x}\right)dx;$ б) $\frac{e^x dx}{e^x-3};$ в) $\int\frac{dx}{\cos^2(5x-4)};$

1.3. а) $\int\left(8x^5+\frac{6}{x^3}-4\sqrt{x}\right)dx;$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{5-6x}};$ в) $\int\mathrm{tg}\,3x\,dx;$

1.4. а) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^3}+6\sqrt[5]{x^8}\right)dx$; б) $\int 7^{2x-3}dx$; в) $\int\frac{\sin x\ dx}{\cos^3 x}$;

1.5. а) $\int\left(4x^3+\frac{2}{x^4}-\frac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{5x+9}$; в) $\int\sqrt[3]{7x-1}\ dx$;

1.6. а) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\cdot\sqrt[9]{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sin^2(4x+3)}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(6x+2)^2}}$;

1.7. а) $\int\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(8+3x)^5}$; в) $\int\sin^4 x\cdot\cos x\ dx$;

1.8. а) $\int\left(7x^6+\frac{3}{x^5}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; б) $\int e^{8x+1}dx$; в) $\int\frac{x\ dx}{2-4x^2}$;

1.9. а) $\int\left(2x^3-\frac{1}{x^4}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$; б) $\int\cos(2x-9)dx$; в) $\int\operatorname{ctg}5x\ dx$;

1.10. а) $\int\left(4x^2+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{\sqrt[6]{x}}\right)dx$; б) $\int e^{x^3}\cdot x^2dx$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$.

1.11. а) $\int\left(8x^5+\frac{6}{x^3}-4\sqrt{x}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{5-6x}}$; в) $\int\operatorname{tg}3x\ dx$;

1.12. а) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^3}+6\sqrt[5]{x^8}\right)dx$; б) $\int 7^{2x-3}dx$; в) $\int\frac{\sin x\ dx}{\cos^3 x}$;

1.13. а) $\int\left(4x^3+\frac{2}{x^4}-\frac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{5x+9}$; в) $\int\sqrt[3]{7x-1}\ dx$;

1.14. а) $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}+11\cdot\sqrt[9]{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sin^2(4x+3)}$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(6x+2)^2}}$;

1.15. а) $\int\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{(8+3x)^5}$; в) $\int\sin^4 x\cdot\cos x\ dx$;

1.16. а) $\int\left(7x^6+\frac{3}{x^5}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; б) $\int e^{8x+1}dx$; в) $\int\frac{x\,dx}{2-4x^2}$;

1.17. а) $\int\left(2x^3-\frac{1}{x^4}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$; б) $\int\cos(2x-9)dx$; в) $\int\mathrm{ctg}\,5x\,dx$;

1.18. а) $\int\left(4x^2+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{\sqrt[6]{x}}\right)dx$; б) $\int e^{x^3}\cdot x^2dx$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$;

1.19. а) $\int\left(3+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{x^4+3}$; в) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\cdot dx$;

1.20. а) $\int\left(7x-\frac{4}{x^5}+3\sqrt[6]{x}\right)dx$; б) $\frac{e^x dx}{e^x-3}$; в) $\int\frac{dx}{\cos^2(5x-4)}$.

2. Вычислить с помощью определённого интеграла площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой. Сделать чертеж и заштриховать искомую фигуру.

2.1. $y=\frac{1}{3}(x+4)^2$; $y-x-10=0$.

2.2. $y=\frac{1}{3}(x-2)^2$; $y-x-4=0$.

2.3. $y=\frac{1}{3}(x+5)^2$; $y-x-11=0$.

2.4. $y=\frac{1}{3}(x-1)^2$; $y-x-5=0$.

2.5. $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$; $y-x-9=0$.

2.6. $y=\frac{1}{3}(x-3)^2$; $y-x-3=0$.

2.7. $y=\frac{1}{3}(x-4)^2$; $y-x-2=0$.

2.8. $y=\frac{1}{3}(x+2)^2$; $y-x-8=0$.

2.9. $y=\frac{1}{3}(x-5)^2$; $y-x-1=0$.

2.10. $y=\frac{1}{3}(x+1)^2;\qquad y-x-7=0.$

2.11. $y=\frac{1}{3}(x+4)^2;\qquad y-x-10=0.$

2.12. $y=\frac{1}{3}(x-2)^2;\qquad y-x-4=0.$

2.13. $y=\frac{1}{3}(x+5)^2;\qquad y-x-11=0.$

2.14. $y=\frac{1}{3}(x-1)^2;\qquad y-x-5=0.$

2.15. $y=\frac{1}{3}(x+3)^2;\qquad y-x-9=0.$

2.16. $y=\frac{1}{3}(x-3)^2;\qquad y-x-3=0.$

2.17. $y=\frac{1}{3}(x-4)^2;\qquad y-x-2=0.$

2.18. $y=\frac{1}{3}(x+2)^2;\qquad y-x-8=0.$

2.19. $y=\frac{1}{3}(x-5)^2;\qquad y-x-1=0.$

2.20. $y=\frac{1}{3}(x+1)^2;\qquad y-x-7=0.$

9.7 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №7

Укажите номер правильного ответа.

1. Какого порядка дифференциальное уравнение $y''+(y')^3+Sin\,y=0$

1) 1-го; 2) 2-го; 3) 3-го; 4) 4-го;

2. Частным решением уравнения $y'-y=0$ является функция:

1) $y=Cosx$; 2) $y=e^x$; 3) $y=x^2$; 4)

3. Какая из функций является частным решением уравнения $x^2\cdot y'=1$?

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=\frac{1}{x}+1$; 3) $y=-\frac{1}{x}$; 4) $y=x^2$;

4. Уравнение $y'+\frac{y}{x}=y^2$ является:

1)Линейным дифференциальным уравнением.

2)Уравнением с разделяющимися переменными.

3)Дифференциальным уравнением II-го порядка , допускающим понижение порядка.

4)Уравнением Бернулли.

5. Функция $y=10x^2$ является решением уравнения:

1) $y'-10x=0$; 2) $y'+10x=0$; 3) $y'+20x=0$;

4) $y'-20x=0$;

6. Решением уравнения $y'=y$, удовлетворяющим начальному условию $y(1)=1$, является функция …

1) $y=e^x$; 2) $y=e^{x+1}$; 3) $y=e^{x-1}$; 4) $y=e^{2x}$;

7. Вычислить общее решение уравнения $y'=2y$

1) $y=Ce^{-2x}$; 2) $y=e^{-2x}+C$; 3) $y=e^{2x}+C$;

4) $y=Ce^{2x}$;

8. Найти общее решение уравнения $y'=\sqrt{y}$

1) $y=2\sqrt{x}+c$; 2) $y=\frac{1}{4}(x+c)^2$; 3) $y=\frac{1}{4}x^2+c$;

4) $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$;

9. Какое из следующих уравнений можно рассматривать, как уравнение Бернулли ?

1) $y'+xy=y^3$; 2) $y''\cdot xy^2=1$; 3) $(y')^2+y=x$;

4) $y'+xSiny=y$;

10. Какого порядка дифференциальное уравнение $y'''+(y')^2+x=0$

1) 1- ого; 2) 2- ого; 3) 3-его; 4) 4-ого;

11. Частным решение уравнения $y'' = x$ является функция…

1) $y = x^3 + 3;$ 2) $y = \frac{6}{x};$ 3) $y = \sqrt{2}\, x^2;$

4) $y = \frac{1}{6}x^3 - 4;$

12. Уравнение $y' + \frac{y}{x} = 1$ является …

1) Линейным дифференциальным уравнением.

2) Уравнением с разделяющимися переменными.

3) Дифференциальным уравнением второго порядка, допускающим понижение порядка.

4) Линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

13. Решением уравнения $y' = y$, удовлетворяющим начальному условию $y(0) = 1$, является функция…

1) $y = e^x;$ 2) $y = x + 1;$ 3) $y = e^{-x};$

4) $y = x^2 + 1;$

14. Общее решение уравнения $y' = y^2$ имеет вид?

1) $y = -\frac{1}{x} + c;$ 2) $y = \frac{1}{x} + c;$ 3) $y = -\frac{1}{x + c};$

4) $y = \frac{1}{x + c};$

15. Общее решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + 1$ есть…

1) $y = x \ln|x| + C;$ 2) $y = x + C;$ 3) $y = \ln|x| \cdot C;$

4) $y = x \ln |Cx|;$

9.8 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №8

1.Найти: 1) частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 2) полный дифференциал функции dz; 3) смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; 4) градиент функции $z = f(x, y)$ в точке M_0.

1.1 $z=\ln(x-y^2)$, $M_0(1;0)$.

1.2. $z=\sin\dfrac{x}{y}$, $M_0(\pi;1)$.

1.3. $z=\dfrac{x+2y}{y}$, $M_0(-2;3)$.

1.4. $z=\mathrm{tg}(x^3y)$, $M_0(-1;\pi)$.

1.5. $z=\mathrm{e}^{x^2y-x}$, $M_0(2;0)$.

1.6. $z=(x+y)\arccos x$, $M_0\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

1.7. $z=\dfrac{y}{x^2-y}$, $M_0(-2;0)$.

1.8. $z=\mathrm{arctg}(xy)$, $M_0(-1;0)$.

1.9. $z=\ln(2x+y^2)$, $M_0(0;-1)$.

1.10. $z=\cos(x+y^3)$, $M_0(\pi/2;0)$.

1.11. $z=\sqrt{x^2+4y}$, $M_0(3;4)$.

1.12. $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $M_0(-4;-1)$.

1.13. $z=\mathrm{e}^{x^3+xy}$, $M_0(-1;1)$.

1.14. $z=x^2\arcsin y$, $M_0(2;0)$.

1.15. $z=\dfrac{x-y}{xy}$, $M_0(-2;1)$.

1.16. $z=\mathrm{ctg}(x^2+y)$, $M_0(0;\pi/2)$.

1.17. $z=\sqrt[3]{y-x^2}$, $M_0(0;8)$.

1.18. $z=x\mathrm{e}^{x-y}$, $M_0(-1;1)$.

1.19. $z=\dfrac{\sqrt{y}}{x-y}$, $M_0(0;1)$.

1.20. $z=\cos(x-2y)$, $M_0(-\pi;\pi/2)$.

1.21. $z=\dfrac{x+y}{x}$, $M_0(2;0)$.

1.22. $z=\sqrt{x-y}$, $M_0(2;1)$.

1.23. $z=\ln(x+y^2)$, $M_0(0;1)$.

1.24. $z=\dfrac{x-y}{x}$, $M_0(1;1)$.

1.25. $z=\dfrac{x+2y}{x+3}$, $M_0(0;1)$.

1.26. $z=\sqrt{x+2y}$, $M_0(4;0)$.

1.27. $z=\sin(x-y)$, $M_0(\pi/2;0)$.

1.28. $z=\cos(x+2y)$, $M_0(\pi;0)$.

1.29. $z=y\ln x$, $M_0(1;1)$.

1.30. $z=\sqrt{y-2x}$, $M_0(0;1)$.

2. Исследовать на экстремум заданную функцию двух переменных $z=f(x,y)$.

2.1. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y+2$.

2.2. $z=x^2+y^2-4y+2x+1$.

2.3. $z=x^2+y^2-2y+1$.

2.4. $z=x^2-y^2+2y+1$.

2.5. $z=x^2+y^2-xy-2x+y$.

26. $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x-4$.

2.7. $z=x^3+y^2-3x+2y$.

2.8. $z=x^3+y^3-3xy+1$.

2.9. $z=x^2+y^2-xy+2y$.

2.10. $z=x^2+y^2-xy+x+y$.

2.11. $z=x^3+y^2-2xy+6$.

2.12. $z=6x^2+2y^2+2xy+4y+4$.

2.13. $z=3xy-x^2-3y^2+y+5$.

2.14. $z=x^2+y^2-xy+9x-6y+20$.

2.15. $z=x^2+2y^2+2xy-3x-4y+1$.

2.16. $z=xy-2x^2-4y^2+x+12$.

2.17. $z = y^2 + 2xy - 4x - 2y - 3$.

2.18. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y + 2$.

2.19. $z = x^2 - 2y^2 - 2x + 6$.

2.20. $z = x^2 - 2y^2 + 3xy - x + 1$.

2.21. $z = 5x^2 + y^2 + xy - 2y + 10$.

2.22. $z = 2x^3 - 4xy + 4x - y - 3$.

2.23. $z = 4x^2 + y^2 - 7xy + y - 2$.

2.24. $z = xy - y^3 + x - 2$.

2.25. $z = 2x^2 + 3y^2 - xy + 3y + 9$.

2.26. $z = x^3 + 2y^2 - x - y + 8$.

2.27. $z = x^4 - y^2 + xy - 1$.

2.28. $z = 6x^2 + y^2 - 4xy + x - 3$.

2.29. $z = x^2 - 4y^2 + 3xy + y - 10$.

2.30. $z = 2x^2 - xy + 6y^2 - 12x + 3$.

ГЛОССАРИЙ

Возрастающая на промежутке функция – такая функция y=f(x), что для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X, \quad x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Выпуклая вверх функция— функция, для которой любой отрезок между двумя любыми точками графика функции в векторном пространстве лежит выше соответствующей дуги графика.

Выпуклая вниз функция — функция, для которой любой отрезок между двумя любыми точками графика функции в векторном пространстве лежит ниже соответствующей дуги графика.

y=f(x)* непрерывная в точке *x_o - если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

Дифференциал функции *y=f(x)* в точке *x* - главная часть приращения функции: $dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx$.

Дифференциал функции y = f(x) линейная часть приращения функции, равен произведению её производной на приращение независимой переменной x (аргумента).

Дифференциалом dx независимой переменной x понимают любое, не зависящее от x, число, поэтому, по определению, дифференциалом независимой переменной x называют ее приращение Dx, т.е. полагают, что dx=Dx.

Дифференциальное уравнение — уравнение, в которое входят производные функции, и может входить сама функция, независимая переменная и параметры.

Дифференциальное уравнение - уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные.

Дифференциальное уравнение второго порядка - уравнение вида: $F(x; y; y'; y'') = 0 \quad или \quad y'' = f(x; y; y')$.

Дифференциальное уравнение первого порядка - уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производную: $F(x; y; y') = 0 \quad или \quad y' = f(x; y)$.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными - уравнение вида: $P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0$.

Дифференциальные уравнениями с разделенными переменными - уравнения, в которых выражение, зависящее от *y*, входит только в левую часть, а выражение, зависящее от *x* - только в правую часть.

Дифференцирование функции – это процесс нахождения производной.

Дифференцируемая (в точке) функция — это функция, у которой существует дифференциал (в данной **точке**).

Дифференцируемая на некотором множестве функция — это функция, дифференцируемая в каждой точке данного множества.

Интеграл – это сумма бесконечно большого количества бесконечно малых слагаемых.

Интеграл дифференциального уравнения – это решение дифференциального уравнения, которое имеет неявный вид.

Интегральная кривая дифференциального уравнения - график всякого решения дифференциального уравнения.

Интегрирование функции – это восстановление функции по её производной (обратное действие по отношению к дифференцированию).

Касательной к графику функции дифференцируемой в точке называется прямая, проходящая через точку и имеющая угловой коэффициент.

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка - Уравнение вида: $y' + p(x) \cdot y = g(x)$.

Неопределённый интеграл для **функции** — это совокупность всех первообразных данной функции.

Неопределенный интеграл от функции *f(x)* - совокупность всех первообразных функции *f(x)*. $\int f(x)dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x)$.

Несобственные интегралы - определенные интегралы от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка - функция $y = \varphi(x;c)$, которая является решением ДУ при каждом *c* *(c=const),* и для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ константа *c* определяется однозначно.

ОДУ первого порядка - уравнение $y' = f(x;y)$, если *f(x;y)* – однород. функция нулевого порядка, т.е. $f(\lambda x;\lambda y) = f(x;y)$.

Определенный интеграл для функции - это функция, производная от которой дает подынтегральную функцию.

Определенный интеграл от *f(x)* на [*a;b*] - число *I*, как предел интегральной суммы, не зависящий ни от способа разбиения отрезка [*a;b*] на частичные отрезки, ни от выбора в них точек ξ_i:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \lambda = \max \Delta x_i, i = \overline{1,n}$$

Первообразная функции *f(x)* на интервале *(a;b)* - функция *F(x):* $\forall x \in (a;b) \Rightarrow F'(x) = f(x)$.

Порядок дифференциального уравнения - порядок наивысшей производной, входящей в дифференциальное уравнение.

Предел функции *f(x)* в точке x_o, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ число A, если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, что при всех x: $|x-x_o|< \delta$, $x \neq x_o$ выполняется неравенство $|f(x)-A|< \varepsilon$.

Предел числовой последовательности x_n - число a, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется $|x_n - a|< \varepsilon$. Записывают $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Производная функции *y=f(x)* в точке *x* - предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производная функция — понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке.

Решение дифференциального уравнения - это неявно заданная функция Ф(x, y) = 0 (в некоторых случаях функцию y можно выразить через аргумент x явно), которая обращает дифференциальное уравнение в тождество.

Решение дифференциальное уравнения - функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное тождество.

Сходящаяся числовая последовательность - имеет предел, причем всегда единственный.

Точка экстремума - точка, в которой достигается экстремум.

Функция *y=f(x)* - зависимость f, при которой каждому $x \in D$ ставится в соответствие единственное значение $y \in E$.

Функция называется **непрерывной в точке**, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Числовая последовательность x_n - функция, заданная на множестве натуральных чисел $x_n=f(n)$.

Экстремум — максимальное или минимальное значение функции на заданном множестве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. — М. : ИНФРА-М, 2018. — 479 с. — (Высшее образование). — Режим доступа: www.dx.doi.org/10.12737/5394.
2) Высшая математика: Практикум / И.Г. Лурье, Т.П. Фунтикова. - М.: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 160 с.: 60x88 1/16. (обложка) ISBN 978-5-9558-0281-7) — Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=368074
3) Краткий курс высшей математики / Балдин К.В., - 2-е изд. - М.:Дашков и К, 2019. - 510 с.: ISBN 978-5-394-02103-9— Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=415059
4) Математика для экономического бакалавриата: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 472 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-004467-5 — Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=558399
5) Плотникова, Ю.А. Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных: Методические указания и задания для самостоятельной работы по курсу «Математика» / Ю.А. Плотникова, Н.В. Старковская. – Вологда–Молочное: ИЦ ВГМХА, 2009. – 55 с.

ПОЛЕЗНЫЕ ССЫЛКИ

Официальный сайт ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА

Образовательный портал ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА

ВИКИПЕДИЯ – свободная энциклопедия

ОНЛАЙН – КАЛЬКУЛЯТОР на YANDEX.RU

GOOGLE ПОИСК

ЯНДЕК ПОИСК