Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вологодская государственная молочнохозяйственная академия имени Н.В. Верещагина»

Инженерный факультет

Кафедра технические системы в агробизнесе

В. Ю. Ивановская

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

для студентов, обучающихся по направлениям подготовки
35.03.06 - Агроинженерия, 35.02.16 - Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования, 23.02.07 - Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей, 19.02.12 - Технология продуктов питания животного происхождения

Вологда–Молочное
2023

УДК 519.2 (071)
ББК 22.171 р30
Т338

Р е ц е н з е н т ы:
к.т.н., доцент кафедры технические системы в агробизнесе ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА
А.С. Михайлов,
к.э.н., доцент кафедры энергетических средств и технического сервиса ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА
Н.И. Кузнецова

Т338 Теория вероятностей: методическое пособие / Разраб. В.Ю.Ивановская . – Вологда–Молочное: ИЦ ВГМХА, 2023. – 32 с.

Методическое пособие по курсу «Теория вероятностей» предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.02.16 - Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования, 23.02.07 - Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей, 19.02.12 - Технология продуктов питания животного происхождения

Методическое пособие одобрено методической комиссией инженерного факультета.

УДК 519.2 (071)
ББК 22.171 р30

1. Предисловие

Целью данного методического пособия является помощь студентам при самостоятельной работе, выполнении контрольных заданий и при подготовке к экзамену. В пособии разобраны типовые примеры по темам, приведены основные понятия и формулы.

2. Виды случайных событий. Операции над событиями

Всякое действие, явление, происходящее при определенной совокупности условий, называют **испытанием**, результат испытания называют **событием**.

Наблюдаемые нами события можно подразделить на следующие три вида:

- достоверные;
- невозможные;
- случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать.

События называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События называют **совместными**, если появление одного из них не исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События называют **равновозможными**, если есть основание считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Совокупность всех единственно возможных событий испытания называют **полной группой событий**.

Противоположными называют два единственно возможных события образующих полную группу событий.

Суммой событий А и В называют событие, состоящее в появлении **или** события А, **или** события В, **или** обоих событий.

Произведением двух событий А и В называют событие, состоящее **и** в появлении события А, **и** в появлении события В.

3. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность

Вероятность является одним из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Рассмотрим определение, которое называют **классическим**.

Каждый из возможных результатов испытания, т.е. каждое событие, которое может наступить в испытании, назовем **элементарным исходом**.

Те элементарные исходы, при которых интересующее нас событие наступает, назовем **благоприятствующими** этому событию.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех единственно возможных и равновозможных исходов испытания.

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A; n — число всех возможных элементарных исходов испытания.

Вероятность есть число, характеризующее возможность появления события.

Пример. *Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что на верхней грани появится нечетное число.*

Решение.

Пусть событие A — «на верхней грани появится нечетное число». Число благоприятствующих событию A исходов $m=3$ (выпадет 1,3,5); число возможных исходов $n=6$.

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей $0 \le P(A) \le 1$.

Наряду с вероятностью, к основным понятиям теории вероятностей относится относительная частота.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

$$W(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Пример. *По цели произвели 15 выстрелов, причем было зарегистрировано 9 попаданий. Определить относительную частоту поражения цели.*

Решение. Относительная частота поражения цели $W(A) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Геометрическое определение вероятности появилось, благодаря попытке отказаться от конечности m и n.

Пусть на плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. Требуется найти вероятность того, что точка, взятая наудачу в области G, попадет в область g. При этом, выражению «точка, взятая наудачу в области G» придается следующий смысл: эта точка может попасть в любую точку области G.

<u>**Вероятность**</u> попадания точки в какую либо область G пропорциональна мере (mes) этой части (длине, площади, объему и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы:

$$P(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)}.$$

4. Элементы комбинаторики

Формулы комбинаторики составляют теоретическую базу при использовании классического определения вероятности, которое в прикладных задачах играет большую роль.

В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций:

- перестановки;
- размещения;
- сочетания.

1) Комбинации из ***n*** элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называют **<u>перестановками</u>**. Обозначаются символом $Đ_n$.

$$Đ_n = n!.$$

Пример. *В школьном соревновании участвовало 3 класса, сколько существует вариантов распределить места между ними.*

Решение. Количество вариантов распределения трех классов по местам равно числу перестановок из трех элементов:

$$Đ_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot = 6.$$

2) Комбинации из ***n*** элементов по ***k*** элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами, или порядком элементов называют **<u>размещениями</u>**. Обозначаются символом $À_n^k$, где   количество всех имеющихся элементов; k — количество элементов в каждой комбинации $(k \le n)$.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример. *Из пяти карточек с буквами К, Л, М, Н, О наугад одну за другой выбирают три и располагают в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово «ЛОМ»?*

Решение. Обозначим A событие, состоящее в том, что получится слово «ЛОМ». Благоприятствует событию A только один исход, $m=1$(комбинация букв «ЛОМ»). Общее число возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 3 карточки из имеющихся 5:

$$n = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Тогда, искомая вероятность:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{A_5^3}=\frac{1}{60}.$$

3) <u>Сочетаниями</u> называют все возможные комбинации из ***n*** элементов по ***k*** элементов, которые отличаются друг от друга, по крайней мере хотя бы одним элементом. Обозначаются символом $\tilde{N}_n^k$, где n — количество всех имеющихся элементов; k — количество элементов в каждой комбинации $(k \le n)$.

$$\tilde{N}_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Пример. *Сколькими способами можно выбрать* 3 *студентов, из группы, в которой* 30 *человек.*

Решение. Используем число размещений из 30 элементов по 3:

$$C_{30}^3=\frac{30!}{3!\cdot(30-3)!}=\frac{30!}{3!\cdot 27!}=\frac{27!\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 27!}=4060.$$

5. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1) Теорема сложения вероятностей несовместных событий: вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Следствие 1: вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Следствие 2: сумма вероятностей событий, образующих полную группу событий равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1,$$

где $\{A_1; A_2; ...; A_n\}$ – полная группа событий.

Следствие 3: вероятность события, противоположного событию A, равна разности между единицей и вероятностью события A.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

2) Теорема сложения вероятностей совместных событий: вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий (например, для трех совместных событий):

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Пример. *Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет* 10 *очков, равна* 0.2*; вероятность выбить* 9 *очков, равна* 0.4*. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее* 9 *очков.*

Решение. Обозначим C событие, состоящее в том, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков. Событие C произойдет, если стрелок выбьет или 10 очков (событие A), или 9 очков (событие B), т.е. C — сумма событий A и B. События A и B несовместные (попадание в 10 исключает попадание в 9 при одном выстреле, и наоборот), поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6.$$

Два события называют **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от появления другого.

Два события называют **зависимыми**, если вероятность появления одного из них зависит от наступления другого события.

3) Теорема умножения вероятностей независимых событий: вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие: вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример. Два охотника одновременно выстрелили по тигру. Вероятность попадания для первого охотника $p_1 = 0{,}7$, для второго $p_2 = 0{,}8$. Найти вероятности следующих событий:

1) оба охотника попадут в тигра;
2) оба охотника промахнутся;
3) только один охотник попадет в цель;
4) хотя бы один охотник попадет в цель.

Решение.

1) Обозначим A событие, состоящее в том, что оба охотника попадут в цель. Используем теорему умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

2) Обозначим B событие, состоящее в том, что оба охотника промахнутся. Найдем вероятности промаха для каждого охотника. Вероятность

промаха для первого охотника: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,7 = 0,3$; вероятность промаха для второго охотника: $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,8 = 0,2$, тогда искомая вероятность:

$$P(B) = q_1 \cdot q_2 = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$$

3) Обозначим C событие, состоящее в том, что только один охотник попадет в тигра. Событие C произойдет, если «первый охотник попадет в цель и второй промахнется» или «первый охотник промахнется в цель и второй попадет». Искомая вероятность:

$$P(C) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,14 + 0,24 = 0,38.$$

4) Событие D — «хотя бы один охотник попадет в тигра» является противоположным событию B – «оба промахнутся»:

$$P(D) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,06 = 0,94.$$

Если события A и B зависимые, то **условной вероятностью** $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

4) Теорема умножения вероятностей зависимых событий: вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Пример. *На вечеринке разыгрываются 20 лотерейных билетов, причем 15 из них с выигрышами. Студент вытаскивает наудачу два билета. Найти вероятность того, что оба билета окажутся с выигрышем.*

Решение. Обозначим событие A — «первый билет с выигрышем», событие B — «второй билет с выигрышем».

Вероятность наступления события A по формуле нахождения вероятности будет равна: $P(A)=\frac{15}{20}$, здесь при вытаскивании первого билета возможных исходов 20, а благоприятных для события A — 15 исходов (количество билетов с выигрышем). При вычислении условной вероятности $P_A(B)$ учтем, что возможных исходов будет 19 (так как один билет уже вынут), а выигрышных билетов останется 14. Тогда $P_A(B)=\frac{14}{19}$. Окончательно имеем, что вероятность того, что оба билета окажутся с выигрышем будет равна

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}=\frac{21}{38}.$$

6. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$, которые образуют полную группу. Известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A)$, …, $P_{B_n}(A)$ события A. В поставленных условиях вероятность события A можно найти по **формуле полной вероятности**:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A),$$

где события $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ называют **гипотезами**.

Пример. *На контроль поступают детали с двух станков. Производительность станков различна. На первом станке изготовляют* 60% *всех деталей, на втором —* 40%. *Вероятность брака на первом станке* $0{,}02$, *на втором —* $0{,}04$. *Найти вероятность того, что поступившая на контроль* *деталь бракованная.*

Решение. Событие A — «поступившая на контроль деталь бракованная». B_1 и B_2 — события, означающие, что деталь сделана соответственно на первом и втором станке. Тогда по условию задачи:

$$P(B_1)=\frac{60}{100}=0{,}6;\ P(B_2)=\frac{40}{100}=0{,}4;$$

$$P_{B_1}(A)=0{,}02;\ P_{B_2}(A)=0{,}04.$$

Искомая вероятность:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=0{,}6\cdot 0{,}02+0{,}4\cdot 0{,}04=0{,}028.$$

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, которые образуют полную группу. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по **формулам Бейеса**:

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)},\ i=1,2,\ldots,n,$$

где $P(A)$ находят по формуле полной вероятности.

Пример. *В условиях предыдущего примера проверенная деталь оказалась бракованной. Определить вероятность того, что она была изготовлена на первом станке.*

Решение. Искомая вероятность $P_A(B_1)$ — вероятность того, что деталь изготовлена на первом станке, при условии, что уже известно, что деталь бракованная.

По формуле Бейеса:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Из предыдущего примера известно, что

$$P(B_1)=\frac{60}{100}=0{,}6;\ P_{B_1}(A)=0{,}02;\ P(A)=0{,}028.$$

Тогда, искомая вероятность равна

$$P_A(B_1)=\frac{0{,}6\cdot 0{,}02}{0{,}028}\approx 0{,}43.$$

7. Повторные независимые испытания

Испытания называют **повторно независимыми**, если испытания являются независимыми и вероятность появления события A в каждом испытании постоянна.

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что при n повторных испытаниях событие A произойдет k раз. При этом:

- если $n \le 10$, то используют **формулу Бернулли**:

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot p^k\cdot q^{n-k},$$

где $q=1-p$ — вероятность не наступления события A в каждом испытании.

- Если $n>10$ и $p\ge 0{,}1$, то используют **локальную теорему Лапласа**:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

где $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Значения $\varphi(x)$ находят по таблице, которая имеется в большинстве учебников и задачников по теории вероятностей. Функция $\varphi(x)$ четная, т.е.

$\varphi(-x)=\varphi(x)$, таблица содержит значения функции $\varphi(x)$ лишь для $x\in[0;4]$; для $x>4$ можно принять $\varphi(x)=0$.

- Если $n>10$ и $p<0{,}1$, (либо $n\cdot p\le 10$) то используют **<u>формулу Пуассона</u>**:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda=np$.

Пример. *Процент всхожести семян* 80%. *Определить вероятность того, что из* 1000 *посеянных семян взойдут* 780.

Решение. Т.к. процент всхожести семян 80%, то вероятность взойти для каждого семени постоянна и равна $p=\dfrac{80}{100}=0{,}8$. Количество посеянных семян (общее количество испытаний) $n=1000$. Т.к. $n>10$ и $p\ge 0{,}1$, то используем локальную теорему Лапласа:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),\ \text{где}\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}};$$

$$\text{Т.к. } k=780;\ q=1-0{,}8=0{,}2,\ \text{то } x=\frac{780-1000\cdot 0{,}8}{\sqrt{1000\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\approx-1{,}58.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$, учитывая четность функции, найдем:

$$\varphi(-1{,}58)=\varphi(1{,}58)=0{,}1145.$$

Тогда, искомая вероятность:

$$P_{1000}(780)\approx\frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\cdot 0{,}1145\approx 0{,}0091.$$

Пример. *Вероятность того, что станок изготовит бракованное изделие, равна* $0{,}02$. *Найти вероятность того, что из* 400 *произведенных станком изделий:1) ровно* 3 *бракованных;2)не менее* 3 *бракованных.*

Решение. Вероятность изготовления бракованного изделия постоянна и равна $p = 0{,}02$. Общее количество изготовленных изделий (общее количество испытаний) $n = 400$. Т.к. $n > 10$ и $p < 0{,}1$, то используем формулу Пуассона: $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = np$.

1) Среди изготовленных изделий ровно 3 бракованных: $k = 3$, $\lambda = 400 \cdot 0{,}02 = 8$.

Тогда, искомая вероятность:

$$P_{400}(3) \approx \frac{8^3 \cdot e^{-8}}{3!} = \frac{512 \cdot 0{,}000335}{6} = 0{,}0286.$$

2) Для определения вероятности того, что среди изготовленных деталей не менее 3 бракованных целесообразно найти вероятность противоположного события: «среди изготовленных деталей меньше 3 бракованных».

$$P_{400}(k \geq 3) = 1 - P_{400}(k < 3).$$

Событию «среди изготовленных деталей меньше 3 бракованных», благоприятны исходы: 0 бракованных деталей, или 1 бракованная деталь, или 2 бракованные детали.

Используя теорему сложения вероятностей несовместных событий и формулу Пуассона, найдем вероятность того, что среди изготовленных деталей меньше 3 бракованных:

$$P_{400}(k < 3) = P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2);$$

$$P_{400}(0) \approx \frac{8^0 \cdot e^{-8}}{0!} = \frac{1 \cdot 0{,}000335}{1} = 0{,}000335;$$

$$P_{400}(1) \approx \frac{8^1 \cdot e^{-8}}{1!} = \frac{8 \cdot 0{,}000335}{1} = 0{,}00268;$$

$$P_{400}(2) \approx \frac{8^2 \cdot e^{-8}}{2!} = \frac{64 \cdot 0{,}000335}{2} = 0{,}01073;$$

Следовательно,

$$P_{400}(k < 3) = 0{,}00034 + 0{,}00268 + 0{,}01073 = 0{,}01375.$$

Искомая вероятность:

$$P_{400}(k \geq 3) = 1 - 0{,}01375 = 0{,}98625.$$

Предположим, что проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события $\grave{A}$ постоянна и равна p. Требуется найти вероятность $P_n(k_1; k_2)$ того, что при n повторных испытаниях событие $\grave{A}$ произойдет не менее k_1 раз и не более k_2 раз. Это можно сделать с помощью **интегральной теоремы Лапласа**:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

Значения $\Phi(x)$ находят по таблице. Функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, таблица содержит значения функции $\Phi(x)$ лишь для $x \in [0;5]$; для $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$.

Пример. *Вероятность того, что деталь изготовлена с нарушениями стандартов равна* $0{,}2$. *Найти вероятность того, что среди* 800 *случайно отобранных деталей нестандартных окажется от* 140 *до* 200 *деталей.*

Решение. По условию $n = 800$, $k_1 = 140$, $k_2 = 200$, $p = 0{,}2$, следовательно, $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Найдем x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{140 - 800 \cdot 0{,}2}{\sqrt{800 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \approx -1{,}77;$$

$$x_2 = \frac{200 - 800 \cdot 0{,}2}{\sqrt{800 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \approx 3{,}54.$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$, учитывая нечетность функции, найдем:

$$\Phi(-1{,}77) = -\Phi(1{,}77) = -0{,}4616;$$

$$\Phi(3{,}54) = 0{,}4997.$$

Искомая вероятность:

$$P_{800}(140; 200) \approx \Phi(3{,}54) - \Phi(-1{,}77) = 0{,}4997 - (-0{,}4616) = 0{,}9613.$$

8. Дискретные и непрерывные случайные величины. Числовые характеристики случайных величин

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины $\tilde{O}$ называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$\grave{I}\ \ (\tilde{O}) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Математическое ожидание служит характеристикой среднего значения случайной величины.

<u>Дисперсией</u> случайной величины $\tilde{O}$ называют математическое ожидание квадрата отклонения:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Вычислять дисперсию удобно по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Для дискретной случайной величины $M(X^2)$ находится по формуле:

$$\grave{I}\ (\tilde{O}^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n.$$

<u>Средним квадратическим отклонением</u> случайной величины $\tilde{O}$ называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение служат характеристиками степени рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания.

Пример. *Найти математическое ожидание* $\grave{I}\ (\tilde{O})$, *дисперсию* $D(X)$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X)$ *дискретной случайной величины* $\tilde{O}$, *закон распределения которой задан в виде таблицы:*

$\tilde{O}$	-2	2	3	4	7
$Ð$	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

Решение. Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений $\tilde{O}$ на их вероятности:

$$\grave{I}\ (\tilde{O}) = -2 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}1 = 2{,}1.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Составим закон распределения $\tilde{O}^2$:

$\tilde{O}^2$	4	4	9	16	49
Ð	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1

Найдем математическое ожидание $\tilde{O}^2$:

$$\grave{I}\ (\tilde{O}^2) = 4 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}3 + 49 \cdot 0{,}1 = 13{,}1.$$

Подставив в формулу для вычисления дисперсии $\grave{I}\ (\tilde{O}^2)$ и $\grave{I}\ (\tilde{O})$, найденные ранее, получим:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}1 - 4{,}41 = 8{,}69.$$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{8{,}69} \approx 2{,}948.$$

Интегральной функцией распределения непрерывной случайной величины $\tilde{O}$ называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Интегральная функция обладает следующими *свойствами*:

Свойство 1. Значения интегральной функции принадлежат отрезку [0,1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Свойство 2. Интегральная функция есть неубывающая функция, т.е.

$$F(x_2) \ge F(x_1), \text{ если } x_2 \ge x_1.$$

Следствие. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению интегральной функции на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

<u>Дифференциальной функцией распределения вероятностей</u> непрерывной случайной величины $\tilde{O}$ называют первую производную от интегральной функции:

$$f(x) = F'(x).$$

Зная дифференциальную функцию, можно найти интегральную функцию по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Пример. *Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X :*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ x - \dfrac{1}{2}, & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) интегральную функцию $F(x)$ и построить ее график; б) вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу $(\frac{3}{2}, 2)$.

Решение. а) Воспользуемся формулой $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Если $x \le 1$, то $f(x) = 0$, следовательно, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{x} (x - \frac{1}{2})dx = \frac{1}{2}(x^2 - x)$.

Если $x > 2$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{2} (x - \frac{1}{2})dx + \int\limits_{2}^{x} 0dx = \frac{1}{2}(x^2 - x)\Big|_1^2 = 1$.

Итак, искомая интегральная функция имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ \dfrac{1}{2}(x^2-x), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис.1.

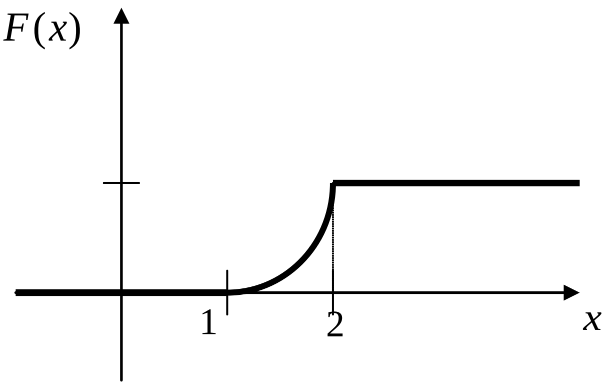


Рис.1

б) Воспользуемся формулой $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

По условию $a=\dfrac{3}{2}$, $b=2$. Следовательно, искомая вероятность:

$$P\left(\frac{3}{2}<X<2\right)=\frac{1}{2}\left[\left(2^2-2\right)-\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{5}{8}.$$

<u>Математическое ожидание непрерывной случайной величины</u> X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

где $f(x)$ — дифференциальная функции.

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (a,b), то $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$.

<u>Дисперсия непрерывной случайной величины</u> $\tilde{O}$, возможные значения которой принадлежат Ox, определяется равенством

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx,$$

или равносильным равенством

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2 .$$

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу (a,b), то

$$D(X)=\int_a^b(x-M(X))^2 f(x)dx,$$

или

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2 .$$

<u>Среднее квадратическое отклонение</u> непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример. *Случайная величина* $\tilde{O}$ *задана дифференциальной функцией*

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{1}{2}, & -1\le x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M(X)$ *и среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X)$.

Решение. Найдем математическое ожидание

$$M(X)=\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{2}dx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X)=\int_{a}^{b}(x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Учитывая, что $M(X)=0$ получим

$$D(X)=\int_{-1}^{1}x^2 f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{2}dx=\int_{0}^{1}x^2dx=\frac{1}{3}.$$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

9. Законы распределения случайной величины

Законом распределения называют соответствие между значениями случайных величин и их вероятностями.

Для дискретных случайных величин закон распределения задается в виде таблицы.

а) Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Тогда случайная величина X – это число появления события A в n независимых испытаниях.

Закон распределения случайной величины X описывается формулой Бернулли и называется **binomialьным.** Он называется так, потому что правую часть формулы $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n \cdot p^n + C_n^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + ... + C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} + ... + C_n^0 \cdot q^n .$$

Биномиальный закон можно записать в виде таблицы:

X	n	$n-1$	$\dots$	k	$\dots$	0
p	p^n	$np^{n-1}q$	$\dots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\dots$	q^n

$$M(x) = np ,$$

$$D(x) = npq .$$

Пример. *Игральная кость брошена два раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадения пяти очков. Найти $M(x)$ и $D(x)$.*

Решение. Вероятность выпадения пяти очков при каждом бросании кости $p = \frac{1}{6}$. Следовательно, вероятность того, что пять очков не выпадет, равна $p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. При двух бросаниях кости пять очков может появиться либо два раза, либо один раз, либо ни разу. Таким образом, возможные значения X таковы: $\tilde{o}_1 = 2$, $\tilde{o}_2 = 1$, $\tilde{o}_3 = 0$.

Найдем вероятности возможных значений случайной величины по формулам:

$$P_2(2) = C_2^2 \cdot p^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 36;$$

$$P_2(1) = C_2^1 \cdot pq = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18};$$

$$P_2(0) = C_2^0 \cdot q^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

Запишем искомый закон распределения:

X	2	1	0
p	$1/36$	$5/18$	$25/36$

Можно увидеть, что $\frac{1}{36} + \frac{5}{18} + \frac{25}{36} = 1.$

$$M(x) = np = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

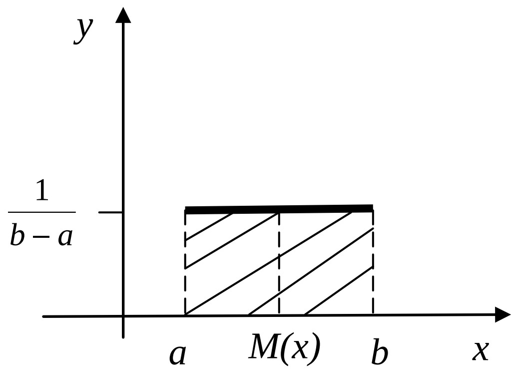
$$D(x) = npq = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}.$$

На практике приходится часто сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин. Дифференциальные формулы этих распределений называют также **плотностью распределения.**

б) Распределение вероятности называют **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, дифференциальная функция имеет постоянное значение. Аналитический закон равномерно распределенной величины можно записать так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

График дифференциальной функции распределения изображен на рис.1.



Р и с. 1.

Площадь заштрихованного прямоугольника всегда равна 1.

$$M(x) = \frac{a+b}{2};$$

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример. *Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной дифференциальной функцией распределения:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Решение.

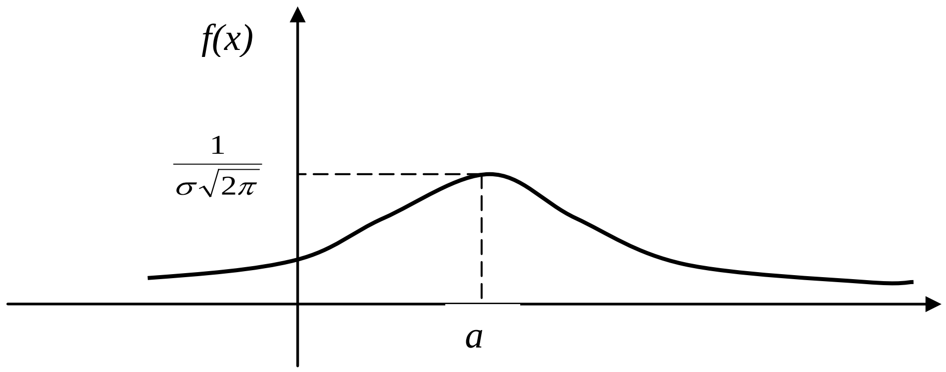
$$M(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+2}{2} = 1;$$

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}.$$

в) **Нормальным** называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается дифференциальной функцией

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Видно, что нормальное распределение определяется двумя параметрами: a — математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение нормального распределения. Кривая $y=f(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 2.



Р и с. 2.

Заметим, что при $a=0$ и $\sigma=1$ нормальную кривую называют нормированной,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Пример. *Дифференциальная функция нормального распределения имеет вид:*

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{18}}.$$

Найти $M(x)$ *и* $D(x)$.

Решение. Согласно общему виду закона нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

находим, что $a=4$ и $\sigma=3$. Отсюда, $M(x)=a=4$, $D(x)=\sigma^2=9$.

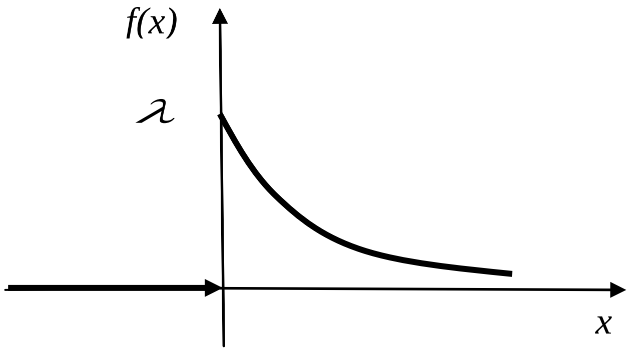
г) **Показательным (экспоненциальным)** называют распределение вероятностей, которое описывается дифференциальной функцией вида:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda\cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases},$$

где λ — постоянная величина.

Это распределение определяется одним параметром λ, что преимущественно по сравнению с другими законами распределениями.

График дифференциальной функции показательного распределения изображен на рис. 3.



Р и с. 3.

$$M(x)=\sigma(x)=\frac{1}{\lambda};$$

$$D(x)=\sigma^2(x)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Пример. *Найти* $M(x)$ *и* $D(x)$ *случайной величины* X, *распределенной по показательному закону:*

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 3e^{-3x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Решение. По условию $\lambda=3$, следовательно $M(x)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{3}$, $D(x)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{9}$.

10. ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин, А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: учебное пособие / А.Н.Бородин. – СПб: Лань, 2019.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / В.Е. Гмурман. - 12-е изд. – М.; Юрайт, 2018
3. Коган Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика. ИНФРА-М, 2019.
4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. – 11-е изд. – М.:Юрайт, 2016.

ОГЛАВЛЕНИЕ